Katolikus Középiskolák Matematika Versenye
2023/24. 2. forduló
11. évfolyam
Javítási útmutató

1. Egy modell alapján az egyik falu éves elektromos energiafelhasználását az $E(x) = 3{,}27 \cdot 1{,}13^{0{,}5x-927}$ függvény adja meg MJ-ban, ahol x az aktuális évszám.
   a) A modell szerint hány százalékkal fog nőni ennek a falunak az energiafogyasztása 2034-ben, 2024-hez képest? **6 pont**
   b) A modell szerint melyik évben lesz a falu elektromos energiafelhasználása 250000 MJ? **5 pont**

a) 2024-ben: $E(2024) = 3{,}27 \cdot 1{,}13^{0{,}5\cdot 2024-927} = 106\,222{,}24\ MJ$ 2pont
2034-ben: $E(2034) = 3{,}27 \cdot 1{,}13^{0{,}5\cdot 2034-927} = 195\,707{,}59\ MJ$ 2 pont
84,24%-kal fog nőni. 2 pont

b) $250\,000 = 3{,}27 \cdot 1{,}13^{0{,}5x-927}$ 1 pont
$76\,452{,}6 = 1{,}13^{0{,}5x-927}$ 1 pont
$lg 76\,452{,}6 = lg 1{,}13^{0{,}5x-927}$ 1 pont
$0{,}5x - 927 = 92$ 1 pont
$x = 2038$ 1 pont

Összesen: 11 pont

2. Határozd meg x értékét úgy, hogy $log_5 x$ és $log_5(log_{25} x)$ számok számtani közepe a $log_{25} x$ legyen! **11 pont**

$log_{25} x = \frac{log_5 x + log_5(log_{25} x)}{2}$ 2 pont
$x > 0$ 1 pont
$log_{25} x^2 = log_5(x \cdot log_{25} x)$ 2 pont
$log_5 x = log_5(x \cdot log_{25} x)$ 1 pont
$x = x \cdot log_{25} x$ 1 pont
$log_{25} x = 1,$ 1 pont
mert $x > 0$, miatt $x = 0$ nem lehet megoldása az egyenletnek. 1 pont
$x = 25$ 1 pont
Ellenőrzés: a számok 2; 0 és 1, melyre teljesül, hogy $\frac{2+0}{2} = 1$ 1 pont

Összesen: 11 pont

3. Az $ABCD$ négyzet oldalfelezőpontjait összekötöttük a négyzet egy belső P pontjával. Az így keletkezett négyszögek közül háromnak a területe $18\ cm^2$; $21\ cm^2$ és $31\ cm^2$. Mekkora lehet a négyzet oldalának pontos értéke?

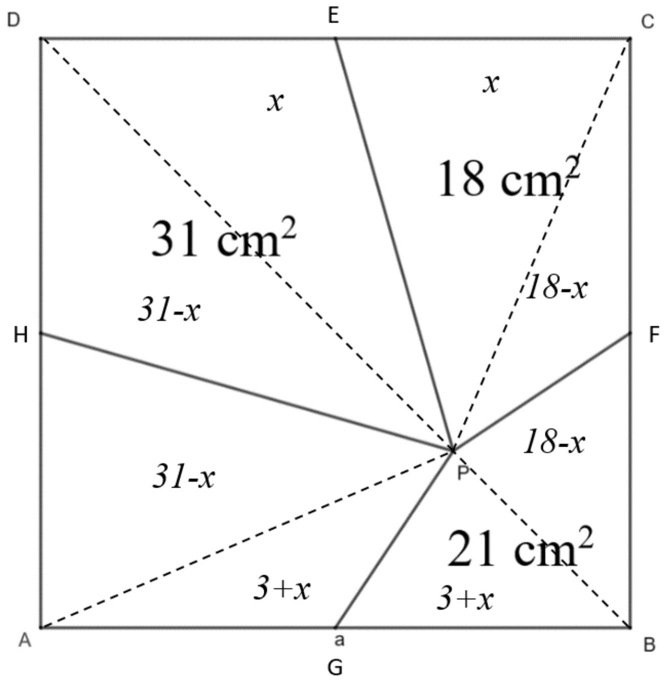
15 pont

1. eset: $21\ cm^2$ és $31\ cm^2$-es rész van egymással szemben:
Kössük össze a P pontot a négyzet mindegyik csúcsával. A keletkező háromszögek területei

$T_{DPE\Delta} = T_{CPE\Delta} = x$, hiszen E a CD oldal felezőpontja, ezért az EP szakasz felezi a $DPC\Delta$ háromszög területét. 2 pont

Hasonlóan: $T_{CPF\Delta} = 18 - x = T_{FPB\Delta}$ 1 pont

Hasonlóan: $T_{GPB\Delta} = 21 - (18 - x) = 3 + x = T_{APG\Delta}$ 1 pont



Hasonlóan: $T_{CPH\Delta} = 31 - x = T_{HPA\Delta}$ 1 pont

Így $T_{HPGA} = 31 - x + 3 + x = 34\ cm^2$ 1 pont

Azaz $T_{ABCD} = 31 + 21 + 18 + 34 = 104\ cm^2$ 1 pont

$a = \sqrt{104}\ cm$ 1 pont

Észre vehetjük, hogy $T_{HPGA} + T_{EPFC} = T_{DEPH} + T_{FBGB}$,
azaz $T_{ABCD} = 2 \cdot (T_{DEPH} + T_{FBGB})$ 1 pont

2. eset: $21\ cm^2$ és $18\ cm^2$-es rész van egymással szemben:

$T_{ABCD} = 2 \cdot (T_{DEPH} + T_{FBGB}) = 2 \cdot (21 + 18) = 78\ cm^2$ 2 pont

$a = \sqrt{78}\ cm$ 1 pont

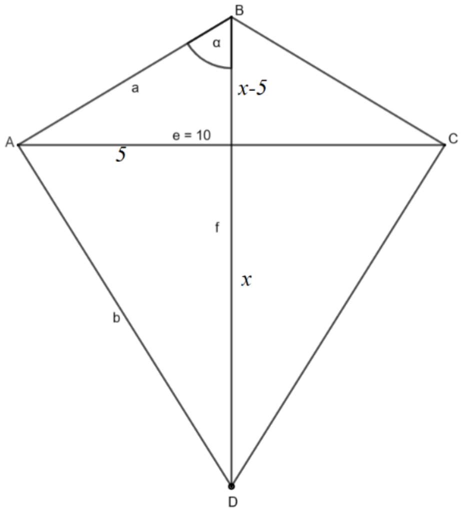
3. eset: $31\ cm^2$ és $18\ cm^2$-es rész van egymással szemben:

$T_{ABCD} = 2 \cdot (T_{DEPH} + T_{FBGB}) = 2 \cdot (31 + 18) = 98\ cm^2$ 2 pont

$a = \sqrt{98}\ cm$ 1 pont

Összesen: 15 pont

4. Egy derékszögű deltoidban a derékszögeket összekötő átló 10 cm hosszú. Ez az átló a szimmetria átlót 2 olyan részre osztja, melyek különbsége 5 cm. Mekkorák a deltoid szögei és mekkora a területe? **10 pont**



ABD derékszögű háromszögre alkalmazzuk a magasságtételt:

$5 = \sqrt{x \cdot (x-5)}$ 2 pont

$x^2 - 5x - 25 = 0$ 2 pont

$x_1 = 8{,}09;\ x_2 = -3{,}09$ 1 pont

$T = \frac{10 \cdot 11{,}18}{2} = 55{,}9\ cm^2$ 1 pont

$tg\alpha = \frac{5}{3{,}09}$ 2 pont

$\alpha = 58{,}28°$ 1 pont

A deltoid derékszögnél különböző szögei: $116{,}56°; 63{,}44°$ 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Hány darab 2024-nél kisebb pozitív egész szám van, amelyre a

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}} + \cdots + \sqrt{\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}$$

kifejezés értéke racionális szám? **13 pont**

$\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}} =$ 1 pont

$\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{x}^2}} =$ 2 pont

$\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^2}{1}} =$ 1 pont

$\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right| =$ 1 pont

$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, mert $x+1 > x$, ha $x \in \mathbb{N}$ 1 pont

$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}} + \cdots + \sqrt{\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} =$

$\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) =$ 2 pont

$\sqrt{n+1}-1$ 1 pont

A kifejezés értéke racionális, ha $\sqrt{n+1}$ racionális, azaz $n+1$ négyzetszám. 1 pont

$n+1<2025$ feltételt figyelembe véve $n+1$ értéke $1^2; 2^2; \dots; 44^2$ lehet.
1 pont

$n+1=1 \rightarrow n=0$, nem lehetséges a feltétel miatt ($n>0$) 1 pont

Tehát 43 db pozitív egész esetén lesz racionális. 1 pont

Összesen: 13 pont

6. Egy szabályos dobókockával hatszor dobunk egymás után, majd a dobások sorrendjében leírjuk a kapott számokat. Mennyi a valószínűsége, hogy olyan hatjegyű szám keletkezik így, amelynek a számjegyei között van 3-as és 6-os? **10 pont**

Összesen $6^6 = 46\,656$ szám képezhető. 1 pont

A feltételeknek nem felelnek meg a következő esetek:

Nincs benne 3-as és 6-os sem: $4^6 = 4\,096$ 1 pont

Nincs benne 3-as: $5^6 = 15\,625$ 2 pont

Nincs benne 6-os: $5^6 = 15\,625$ 2 pont

Szita formula alapján a nem megfelelő számok száma:

$2 \cdot 15\,625 - 4\,096 = 27\,154$ 2 pont

A feltételeknek megfelelő számok száma:

$46\,656 - 27\,154 = 19\,502$ 1 pont

A valószínűsége: $\frac{19\,502}{46\,656}$ 1 pont

Összesen: 10 pont

7. A múltban többféle távolság egységet használtak. Ilyen például

$1\ Liga = 4828{,}03\ m$

$1\ mérföld = 1609{,}34\ m$

$1\ lánc = 20{,}12m$

$1\ yard = 0{,}91m$

Scranton és Jefferson távolsága 10,6 mérföld, Scranton és Bagley távolsága 5,66 Liga, míg Jefferson és Bagley távolsága 1136 lánc.

a) Jeffersonból mekkora szögben látszik Scranton és Bagley távolsága? **7 pont**

b) Egyik alkalommal Bill, aki Scrantonban lakik elsétált Joe-hoz Bagley-ba, majd másnap Jockey-hoz Jeffersonba, harmadnap pedig hazasétált. Ha Bill lépéshossza pontosan 1 yard, akkor hányat lépett útközben? **4 pont**

a) Scranton és Jefferson távolsága $10{,}6 \cdot 1\,609{,}34 = 17\,059{,}004$ méter
1 pont

Scranton és Bagley távolsága $5{,}66 \cdot 4\,828{,}03 = 27\,326{,}6498$ méter

1 pont

Jefferson és Bagley távolsága $1136 \cdot 20{,}12 = 22\,856{,}32$ méter 1 pont

A három település alkotta háromszögre felírva a koszinusztételt. 2 pont

$cos\alpha = 0{,}0855$ 1 pont

$\alpha = 85{,}1°$ 1 pont

b) Scranton és Jefferson között

$17\,059{,}004: 0{,}91 = 18\,746, 16 \rightarrow 18\,747$ lépést tesz 1 pont

Scranton és Bagley között

$27\,326{,}6498: 0{,}91 = 30\,029{,}29 \rightarrow 30\,030$ lépést tesz 1 pont

Jefferson és Bagley között

$22\,856{,}32: 0{,}91 = 25\,116{,}84 \rightarrow 25\,117$ lépést tesz 1 pont

összesen $73\,894$ lépést tesz 1 pont

Ha a kerülettel számolva $67\,241{,}9738: 0{,}91 = 73\,892{,}28 \rightarrow 73\,893$ lépést tesz.
Legfeljebb 2 pontot kaphat a b) részre.

Összesen: 11 pont