

Katolikus Középiskolák Matematika Versenye
2023/24. DÖNTŐ
11. évfolyam

Kedves Versenyző!

Gratulálok eddigi eredményedhez! Ebben a fordulóban hat feladatot kell megoldanod. A feladatokat tetszőleges sorrendben oldhatod meg, íróeszközön kívül számológépet és függvénytáblát lehet használni. A megoldás során mindent írd le, ami a megoldáshoz kapcsolódik. 90 perc áll rendelkezésedre. Minden feladatot külön lapra dolgozz ki, melyre legyen felírva a kódszámod és a feladat sorszáma. Jó munkát kívánok!

1. A koordináta-rendszerben felvesszük az $A(0; 0)$, $B(10; 0)$ és $C(2; 7)$ csúcú háromszöget! A BC oldal C -hez közelebbi harmadoló pontja legyen E , az AB oldal B -hez közelebbi harmadoló pontja D . A DC és AE szakaszok metszéspontja legyen P . Határozd meg a P pont koordinátáit! **8 pont**

2. Három egyenes útszakasz által határolt területen egy kör alakú szabadtéri színpadot létesítenek nézőtérrel, amelynek a kör alakú kerítése mindhárom útszakaszt érinti. A világításhoz szükséges vezeték ehhez a kör alakú kerítéshez szeretnék eljuttatni egy bekötő kábellel, az elektromos hálózatba. A lehetséges bekötési pontok az útszakaszok találkozásánál levő sarkokon vannak. Határozd meg, hogy legalább milyen hosszú kábel szükséges a bekötéshez, ha az útszakaszok hossza 150 m, 180 m és 210 m, és a bekötés a kerítés bármely pontjából indulhat! **9 pont**

3. Add meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol az alábbi egyenlőtlenség teljesül!

$$\log_{5-x}(x^2 + 3x) - 1 < 0$$

14 pont

4. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x = \sqrt{2}$$

9 pont

5. Bizonyítsd be a következő összefüggést:

$$n \cdot n! = (n + 1)! - n!$$

2 pont

Határozd meg a következő szám utolsó 500 számjegyének összegét?

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 2023 \cdot 2023! + 2024 \cdot 2024!$$

8 pont

6. Tudjuk, hogy a következő 30 kijelentés közül két egymást követő kivételével mindegyik igaz.

- A szám osztható 2-vel.
- A szám osztható 3-mal.
- ...
- A szám osztható 31-gyel.

Add meg a legkisebb ilyen pozitív egész szám prímtényezős alakját és melyik a 2 hamis kijelentés?

11 pont