

Katolikus Középiskolák Matematika Versenye
2023/24. DÖNTŐ
12. évfolyam

Kedves Versenyző!

Gratulálok eddigi eredményedhez! Ebben a fordulóban hat feladatot kell megoldanod. A feladatokat tetszőleges sorrendben oldhatod meg, íróeszközön kívül számológépet és függvénytáblát lehet használni. A megoldás során mindent írd le, ami a megoldáshoz kapcsolódik. 90 perc áll rendelkezésedre. Minden feladatot külön lapra dolgozz ki, melyre legyen felírva a kódszámod és a feladat sorszáma. Jó munkát kívánok!

1. A síkon kijelölünk 11 pontot, melyek közül 5 egy körön van. Ezeken kívül nincs a pontok között négy olyan, amely egy körön fekszik. Hány olyan kör van, amely az adott pontok közül legalább hármon átmegegy? **8 pont**

2. Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol az alábbi egyenlőtlenség teljesül!

$$\log_{5-x}(x^2 + 3x) - 1 < 0$$

14 pont

3. Bizonyítsd be a következő összefüggést:

$$n \cdot n! = (n + 1)! - n!$$

2 pont

Határozd meg a következő szám utolsó 500 számjegyének összegét?

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 2023 \cdot 2023! + 2024 \cdot 2024!$$

8 pont

4. Oldd meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left. \begin{array}{l} xy = 1 \\ x + y - \sin^2 z = -2 \end{array} \right\}$$

10 pont

5. Felvesszük egy szabályos tetraéder beírt gömbjének egyik oldallal párhuzamos érintősíkját. Ez lemetsz a tetraéderből egy kisebb tetraédert. Hány százaléka ezen tetraéder térfogata az eredeti tetraéder térfogatának? **13 pont**

6. Tudjuk, hogy a következő 30 kijelentés közül két egymást követő kivételével mindegyik igaz.

- A szám osztható 2-vel.
- A szám osztható 3-mal.
- ...
- A szám osztható 31-gyel.

Add meg a legkisebb ilyen pozitív egész szám prímtényezős alakját és melyik a 2 hamis kijelentés?

11 pont



*Katolikus
Pedagógiai
Intézet*



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



Nemzeti
Tehetség Program