

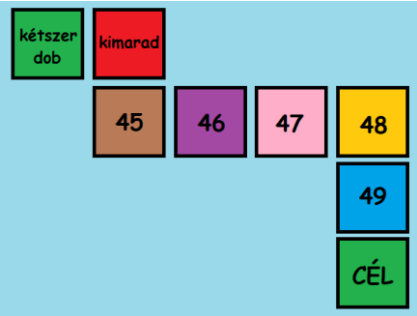
Katolikus Középiskolák Matematika Versenye
2022/23. 2. forduló
12. évfolyam

Kedves Versenyző!

Gratulálok eddigi eredményedhez! Ebben a fordulóban hét feladatot kell megoldanod. A feladatokat tetszőleges sorrendben oldhatod meg, íróeszközön kívül számológépet és függvénytablát lehet használni. **A megoldás során mindent írd le, ami a megoldáshoz kapcsolódik.** 90 perc áll rendelkezésedre. Jó munkát kívánok!

1. Egy új kártyacsomagban a lapokra következő az alakzatokat a következő lehetőségek közül készítik:
 - Alakjuk szerint lehet háromszög, négyzet, ötszög, hatszög és kör.
 - Színük szerint piros, zöld, kék és sárga.
 - Egy lapon az alakzatok száma lehet egy, kettő vagy három.
 - A színezés szerint lehet csíkos, rácsos vagy teljesen színezett.
 - a) Hány lapot tartalmaz egy kártyacsomag, ha minden lehetséges kombinációból egy lapot tartalmaz és van benne két joker lap is? **3 pont**
 - b) Hány lapot kell kihúzni a csomagból, hogy biztosan legyen közöttük minden színből egy? **4 pont**
 - c) Hány lapot kell kihúzni a csomagból, hogy biztosan legyen közöttük valamilyen azonos tulajdonság? **4 pont**
 - d) Ha kiválasztunk egy lapot, akkor hány olyan lap van, amely ettől pontosan 3 tulajdonságban tér el? **6 pont**
2. Egy síkterepen álló 80 m magas emelvényt az épülettől déli irányban álló megfigyelő 36° -os, míg a keleti irányban álló megfigyelő 38° -os emelkedési szögben látja.
 - a) Milyen távolságban áll egymástól a két megfigyelő? **7 pont**
 - b) A két megfigyelőt összekötő egyenes melyik pontjából látszik legnagyobb emelkedési szögben az épület? Mekkora ennek a szögnek a nagysága? **7 pont**
3. Legyen $f(x) = \frac{3}{2\sin x + 1}$ függvény a valós számok legbővebb részhalmazán értelmezve.
 - a) Határozd meg a függvény értelmezési tartományát! **4 pont**
 - b) Határozd meg a függvény értékészletét! **5 pont**
 - c) Határozd meg $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) - f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ pontos értékét? **4 pont**
 - d) Az értelmezési tartomány melyik pontjában lesz a függvény helyettesítési értéke $3\sqrt{2} - 3$? **6 pont**
4. Pista bácsi mindennap megköti a lovát egy mezőn egy pontban és a ló a rendelkezésére álló teljes területet lelegeti. Az egyik nap egy új legelőre vitte a lovát, mely négyszög alakú volt és csúcspontjai: $A(0; 0)$; $B(20; 0)$; $C(18; 15)$ és $D(0; 14)$ Ezen a napon a $(2; 5)$ pontba kötötte ki egy 4 egység hosszú kötéllel. A következő napon az $(5; 9)$ pontba ugyanazzal a kötéllel.
 - a) Mekkora területről tudott ezen a napon a ló legelni, feltételezve azt, hogy a fű az egyik napról a másikra nem nő meg? **6 pont**
 - b) Mennyivel kevesebb fűvet tudott volna enni a ló, ha másnap nem az $(5; 9)$ -ba köti ki, hanem a $(2; 5)$ -ban pontban hagyja, de egy 5 egység sugarú kötéltre köti? **9 pont**
5. Egy társasjáték utolsó mezői láthatók az alábbi ábrán:

A játékot szabályos dobókockával játsszák, egy körben a játékos egyet dobhat és annyit léphet előre, amennyi a dobott pontszáma. A „kétszer dob” mezőre lépve a következő körben a játékos egymás után kétszer dobhat. A „kimarad” mezőre lépve véget ér a köre és a következő körből is kimarad. Célba csak pontos dobással érkezhetsz be a játékos, pl. a 47-es mezőn állva hármast dobva érkezhetsz be, egyébként nem léphet tovább az adott mezőről. Mekkora valószínűséggel érhet be legalább három körből az a játékos, aki most a „kétszer dob” mezőn áll?



11 pont

6. Az egyik fagyizóban 15 cm magas, 4 cm sugarú forgáskúp alakú tölcsérbe teszik az 5 cm sugarú gömb alakú gombócokat.
- a) Milyen magas lesz egy egygombócos fagyis tölcsérben ebben a fagyizóban? **5 pont**
- b) A fagyizóban a shake-t olyan csonkakúp alakú pohárban adják, melynek alapkörének átmérője 6 cm, fedőkörének az átmérője 10 cm, a magassága pedig 15 cm. Milyen magasan lesz ebben a pohárban az 5 dl shake? **12 pont**
- 7.
- a) Egy mértani sorozat hányadosa $\sqrt{3}$, az első tizenkétagjának az összege $\frac{3640}{3-\sqrt{3}}$. Szögei szerint milyen az a háromszög, melynek két oldala cm-ben mérve ennek a sorozatnak az első és második tagja, és ezen két oldal által bezárt szög fokokban mért értéke megegyezik a sorozat hatodik tagjával? **11 pont**
- b) Egy számtani sorozat 21. tagja az első tagjának a tizenhétszerese. A sorozat második tizenöttagjának összeg 1395. Határozd meg a sorozat első tizenöttagjának az összegét! **8 pont**

