

# Katolikus Középiskolák Matematika Versenye

2019/20. DÖNTŐ

## 12. évfolyam

Kedves Versenyző!

Gratulálunk eddigi eredményedhez! Ebben a fordulóban hat feladatot kell megoldanod. A feladatokat tetszőleges sorrendben oldhatod meg, íróeszközön kívül számológépet és függvénytáblát lehet használni. A megoldás során mindent írd le, ami a megoldáshoz kapcsolódik. 90 perc áll rendelkezésedre. Minden feladatot külön lapra dolgozz ki, melyre legyen felírva a neved és a feladat sorszáma. Jó munkát kívánunk!

1. Legyen az  $A$  halmaz a  $\log_{\frac{1}{2}}(x+9) - \log_{\frac{1}{2}}(2-x) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x+4) - 1$ ,  
míg  $B$  az  $24 \cdot 4^{x-1} + 3 \cdot 2^{x+1} - 120 < 0$  egyenlőtlenség  
megoldáshalmaza. Határozd meg az  $B \setminus A$  halmazt! Hány nemnegatív egész  
megoldása van ennek a halmaznak? **22 pont**

2. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$306x^2 + 20y^2 - 20y + 120xy + \frac{16}{x^2} = 47 \quad \mathbf{13 \text{ pont}}$$

3. András 12 millió forint hitelt vett fel 4%-os éves kamatlábra, melyet a megállapodás szerint az első évvégén elkezdve, minden évvégén 20 egyenlő részletben fog törleszteni. A nyolcadik törlesztő részlet befizetése után a bank felajánlotta neki, hogy a maradék összeget 3%-os kamatláb mellett 7 év alatt törlesztheti. Mekkora törlesztőrészlet változást jelentene ez Andrásnak, ha elfogadja a bank ajánlatát? **15 pont**

4. A Nemzetközi Eucharisztikus Konferenciára érkező olasz és spanyol küldöttség vezetője megegyezik, hogy 2020. szeptember 18-án 13 és 14 óra között fog találkozni. Mennyi a valószínűsége, hogy egyik küldöttség vezetőjének sem kell a másikra 15 percnél hosszabb ideig várakoznia, ha mindketten a megbeszélte időintervallumon belül érkeznek a helyszínre?

**12 pont**

5. Egy kisváros egyházközsége elhatározza, hogy a 10 méter alapélű szabályos nyolcszög alapú, 15 méter magas gúla alakú templomtoronyban kilátót épít turisztikai szempontból. A toronyban 3 méterenként építenek szinteket, melyeket az alaplap közepén kezdődő csigalépcsőn lehet majd megközelíteni. Hány ember tartózkodhat egyszerre a harmadik és az ötödik szinten (az első szint az alapszint), ha a lépcső minden szint közepén egy 1,5 méter sugarú körhenger alakú részt foglal el és egy ember részére 2,7 m<sup>2</sup> hasznos területet írnak elő a biztonsági előírások? Hasznosnak tekintünk egy területet, ha ott a belmagasság eléri a 2 métert. **16 pont**

6. Egy valós számokból álló sorozat a harmadik tagjától kezdve kiszámolható az  $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$  rekurzív képlettel. A sorozat elemeire teljesül, hogy  $a_n$ ;  $a_{n+1} + 1$ ;  $a_{n+2} + 2$  ( $n \geq 3$  és  $n$  páratlan) ebben a sorrendben egy mértani sorozat szomszédos tagjai, valamint  $a_3 + 3$ ;  $a_4$ ;  $\frac{a_5 - 1}{2}$  ebben a sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Határozd meg a sorozat nyolcadik tagját! **17 pont**