RITTER BETTY

ISTEN MAGA IS MATEMATIKUS

HOGYAN TANÍTOM A MATEMATIKÁT?

Ciszterci Nevelési Központ
Pécs

2003.

BEVEZETÉS

Tanár vagyok. Nevelő. Tantárgyam eszköz, lehetőség arra, hogy a teljes ember kiformálásában[1] részt vegyek. Szépséges feladat és nagy felelősség gondolkodni tanítani, rendszerességre, pontosságra, következetességre, az elme alkotóerejére nevelni, más utak elfogadására, az indoklás szükségességére, alázatra a végtelennel, a nagy világmindenséggel szemben. Aki egyszer is felteszi magában a kérdést, hogy „kitalálja-e az ember a matematika törvényszerűségeit, vagy megtalálja őket”, már jó úton halad a világ értelmezésében. A tisztán, világosan, önállóan és magabiztosan gondolkodó ember talán kevéssé szervilis, talán tudatosabban él, talán kevésbé nagyítja fel önmagát, talán kevesebbet árt másoknak. Talán.

Mostanság a matematika tanításának tartalmi és módszertani kérdései nagyon időszerűek. Nem véletlenül, hiszen miközben a matematika az emberi elme független, szabad alkotásaként ível át évezredeken, időben és térben egymástól távol levő kultúrákon, szépsége talán az alkotóművészet, a költészet élményével hasonlítható, praktikuma pedig tagadhatatlan, eközben a matematikaórák diákok tízezreinek szereznek kitörölhetetlenül kellemetlen perceket. A matematika elemei és története nem válnak az általános műveltség és a személyiség integráns részévé, a matematika órák nem adnak hasznosnak megélhető tudást. A legtöbb érettségizett számára a matematika túl absztrakt marad, nem sejlik fel semmiféle összefüggés a mindennapokkal vagy más diszciplínákkal (leszámítva néhány – szintén elutasított – természettudományt). Legfeljebb a tudományok szolgálóleányaként emlegetik a matematikát és csak nagyon ritkán a TUDOMÁNYOK KIRÁLYNŐJEként.

Dolgozatom célja néhány példa segítségével mozaikokat mutatni abból, ahogyan a közoktatás jelenlegi keretei között is meg lehet tölteni élettel a matematika órát úgy, hogy az ne csupán a gyerekek tűrőképességét eddze, hanem betöltse küldetését a nevelés rendszerében. Hiszen kevesen vannak, akik az iskolában tanult matematikából sokat használnak az életben, de nagyon sokan hasznát vehetnék azoknak a képességeknek, amelyeket a matematikai fogalmak megértése által lehet legjobban fejleszteni[2]. A keret az ország legtöbb gimnáziumában alkalmazott osztálytanítási és osztályozási rendszer, kimeneti szabályozóként az érettségivel, esetleg felvételivel. Nem célom most ötleteket adni sem a tantárgyi követelmények változtatásához, sem az értékelés másfajta, sokak által fejlesztőbbnek vélt módszereiről elmélkedni. „Mindössze” a matematika tanulás (mint minden tanulás) hatékonyságát növendékeinkben jelentősen növelő belső motivációk, pozitív érzelmi attitűd kiépítésének szemléletét és néhány bevált gyakorlatát ismertetem példaként. „Mindössze” – hiszen ez nem csekélység, éppen ez a tanármesterség lényege. Úgy kínálni szellemi eledelünket, hogy ínycsiklandó, finom fogás legyen és a vendég gyomrát (fejét) ne ülje meg, hanem éppen ellenkezőleg: váljék (szellemi) egészségére.

Ha gyakran feltesszük magunknak a – szinte már unalomig koptatott – kérdéseket, hogy „matematikát tanítunk-e, vagy gyereket”, hogy „tudást akarunk-e adni, vagy csak jegyet”, akkor bizonyosan közelebb kerülünk valódi célunkhoz.

Visszatérve dolgozatom tárgyához, a matematika tanításának kérdéseihez: tulajdonképpen saját munkám sikerességének, változó hatékonyságának húsbavágó kérdéseiről van szó. Bár a nevelő munkája gyakran csak évtizedekkel később érik be, a tantárgyi tudás átadásával nem várhatunk ennyit. Bizonyos mennyiségű matematikai ismeretet el kell sajátítani az érettségiig. Ez a folyamat gyakran küzdelmes, csak néha, üdítően kivételes esetekben diadalmenet. Ugyanis, amíg hosszú évekig csak egy adott korosztály legjobbjai kerültek gimnáziumba, sőt szakközépiskolába is, addig ma az adott korosztály 70-80 %-a középiskolás. Természetszerűleg már nem csak a legjobbak. Korábban tanulásra motivált, jó munkafegyelmű diákok voltak a gimnazisták, akiknek a többsége tudott és akart tanulni, ezért voltak sikeresek már az általános iskolában is. A gimnázium elvárta a biztos tudást, fegyelmezettséget. Ma elmondható, hogy a gimnáziumi tanulók harmada gyengén motivált, nem tud tanulni, hiányosak az alapismeretei, mindezek következtében – megtoldva a „ráhagyásos” szülői neveléssel – fegyelmezetlen. A korábbi, elvárásos tanári magatartás náluk eredménytelen. Ezeknek a gyerekeknek először az érdeklődését kell felkelteni mind a tanulás, mind pedig az egyes tantárgyak iránt. Tanulási technikákat kell mutatni, és mindenekelőtt türelmesen magyarázni. Mindezek kialakíthatják bennük a pozitív motivációt, javulhat az önfegyelmük, ennek következtében nevelési hatékonyságunk mellett a tanításban is eredményesebbek leszünk.

I. A MOTIVÁCIÓRÓL

A motiváció kérdése a matematika tanításában nagyon is valóságos probléma. Bár a matematika különböző absztrakciós szintű elemeivel találkozhatunk a piacon, a kvízjátékokban, a mérnöki munkában, a csillagászatban, a híradástechnikában, a banki biztonságtechnikában, sőt már a társadalomtudományokban is, még akár médiaszemélyiségek is bátran emlegetik rémes emlékű matematika érettségijüket. (Ugyanezt a magyar vagy történelem vizsgával kapcsolatban emlegetni kockázatosabb, hiszen az illető az általános műveltség hiányának a látszatát keltené.) Tanári gyakorlatomból szinte vég nélkül tudnám sorolni azokat a mondatokat, amelyekkel a gimnáziumba érkezők bemutatkoznak matematika órán és azonnal elhatárolják magukat mindennemű szándékos kapcsolattól, amely a tantárgyhoz kötné őket. Jelzik, hogy a csak azért vannak itt, mert muszáj, és „már anyukám is gyenge volt matekból" típusú kijelentésekkel próbálják előre biztosítani, hogy a genetikus determináció okán fennálló és általuk jósolt eredménytelenség miatt ne is kelljen erőfeszítést tenniük. „Na és persze a szöveges feladatokat soha nem értettem" – mondják, de ha egy sms-játékban teszik fel ugyanazt a feladatot, akkor bőszen küldenék a megoldást, hiszen szó sem volt rettenetes hangzású szöveges feladatról, „csak egy kicsit gondolkodni kellett". Így hát hiába a matematika szellemi szárnyalása, hiába a praktikuma, az elutasítottság fájdalmasan nagy. Miért?

A szülők és a gyerekek jó része fátumszerűen tekint adottságaira. Ha a matematika nem megy könnyedén, akkor „humán beállítottságú"-nak tekinti magát, ezzel mintegy előre felmentve önmagát minden erőfeszítés alól. Pedig ha velünk született adottságaink határoznák meg életünk minden tevékenységét, a dadogó Démoszthenész nem lehetett volna szónok, a beteges, sánta Vámbéry Ármin nem járhatta volna be gyalog Ázsiát, az iskolai éveit – ma már köztudomásúan – diszlexiás kisdiákként, bukdácsolva kezdő Einstein nem lehetett volna a 20. század legjelentősebb fizikusa. A képességek nem mutatkoznak meg spontán módon teljes spektrumban, főleg nem a kisiskolás kor elején. Ráadásul nem csupán azokat kell fejleszteni, amelyben a kiválóság ígérete lakozik, hiszen bizonyos képességekre minden embernek szüksége van, pusztán a társadalomban való boldogulás miatt. Ha pedig a túlélésnél többet is megcéloz valaki, még több képességét kell fejlesztenie. Képességeink kibontakoztatása, fejlesztése egyes-egyedül a nekik megfelelő tevékenység elegendő gyakorlásától függ. A matematikához (mint semmi más tudományos vagy művészeti eredményhez) „nincs királyi út" (lásd még III. 2. fejezet). A matematikai képességek (és minden más egyéb képesség) megszerzéséhez, kibontakoztatásához erőfeszítésre van szükség. Tehetség sem létezik enélkül. Persze igaz, hogy a megfelelő gyakorlás mellett nem lesz mindenkinek azonos a képességszínvonala, hiszen ebben már az adottságok kedvező, vagy kedvezőtlen befolyásoló hatása is megmutatkozik. Egy azonban biztos: komoly eredmény, komoly szintű képességfejlesztés nem érhető el erőfeszítés nélkül. Kiváló emberek vallomásai is ezt igazolják. Goethe szerint: „A lángész talán csupán szorgalom…”, míg Edison így összegezte élete tapasztalatait: „A lángész egy százalék ihlet és kilencvenkilenc százalék verejték”.

Nyilvánvaló, hogy tanítványaink jó részének nem elegendő ösztönzés, hogy vannak, akik egy feladatot „szép”-nek, „izgalmas”-nak tartanak, hiszen ők más kihívások felé fordulnak. Az is nyilvánvaló, hogy vannak, akik csiszolt technikák adta eredményességgel vágnak neki mind nehezebb feladatoknak, mégis azt mondhatjuk, hogy a matematika lényegét nem értették meg, nem építették magukba. És hála Istennek, mindannyiunk örömére és javára akadnak néhányan, akik matematikán (is) élesített elméjükkel, differenciált gondolkodásukkal élnek és dolgoznak, nem feltétlenül matematikusként. Nos, ők azok, akiknél a személyiségépítő hatások célt értek. Miféle személyiségépítő célkitűzésről van szó? „Általánosan elfogadott pszichológiai alapelv, hogy a személyiség egy integrációs folyamaton át fejlődik ki: a személyiség részei a szó szoros értelmében összetevődnek és végül egységes, kiegyensúlyozott egésszé alakulnak. Az integrált személyiség a legtöbb kérdésben átfogó véleményt alakít ki, (…) nehéz helyzetekben nem bírálgat, hanem konstruktívan cselekszik, (…) alapvető érdekazonosságot létesít maga és munkatársai között. Nyilvánvalóan a nevelő feladata, annak biztosítása, hogy a gyerekeknek lehetőségük legyen olyan nagyfokú integrációt elérni, amilyenre csak képesek, ugyanúgy, mint ahogy az ő feladata annak biztosítása is, hogy a gyerek értelmi képességei minél jobban kibontakozhassanak.”[3] Ez az eredmény nem képzelhető el, ha tanítványaink negatív beállítottságúak, hiszen a negatív beállítódás gátolja a tanulási és integrációs folyamatokat. Ha valamit nem szeretünk, elhárítjuk, kivetjük magunkból. (A közömbösség még ennél is rosszabb hatású!) Meg kell tehát nyernünk növendékeinket tantárgyunknak, e dolgozat tárgya szerint a matematikának. Lehetséges ez? A válasz természetesen igen, és nem is kell hozzá más, mint egy adag szakmai alázat, a lélektan és a tanulási folyamatok ismerete és a matematika elkötelezett szeretete. Bár a siker nem csupán a szakmai alázat és a megszállottság fokától függ, érdemes belevágni.

II. A MATEMATIKA FOGALMAINAK TANULÁSÁRÓL ÉS TANÍTÁSÁRÓL

A matematika fogalmai a közfelfogás szerint nehezek. Talán, mert elvonatkoztatás eredményei. Gondoljunk csak a kisiskoláskorra kialakuló elemi számfogalomra, a szerialitásra (sorrendiségre), a kisebb-nagyobb (több-kevesebb) fogalmára, az összeadás–kivonásra, az inverz műveletre. A sor tetszőlegesen folytatható a törteken, a függvényeken, irracionális számokon, a logaritmuson át a Boole-algebráig, Improprius-integrálig, vagy ameddig akarjuk. Amíg ezek a fogalmak kialakultak, kikristályosodtak, esetleg formalizáltan jelentek meg, addig bizony az emberiség nagy változásokon ment keresztül, az emberi tudat óriásit fejlődött. Az egyes ember ismereteinek fejlődése lerövidített, letisztított formában, nagy vonalakban követi az emberi faj ismeretfejlődését.[4] Aki foglalkozott már kisgyermekekkel, akár csak sajátjaival is, észrevehette, hogy az 1; 2; sok után miként alakul ki a 3; 4; 5, majd kis szünet után a 6; 7, majd lassan tovább. Az elvont számfogalom előbb tárgyakhoz, majd a kéz ujjaihoz kötődő számlálás eredménye, és hogy globális mennyiségfelismerésként milyen nagy dolog átlépni az ötöt (az egy kézen levő ujjak számát), ez mind komoly absztrakció. A súlyos részképességzavarral (diszkalkuliával) élők már ezzel is nagyon küszködnek. És hol vagyunk még a többi matematikai fogalomtól…

Az elvonatkoztatás képessége és annak szintjei nem azonosan fejlődnek a különböző gyermekeknél. Bármely életkorban nagy eltérések mutatkoznak, egymáshoz képest akár két-három évnyi is! Mindenesetre jó tudnunk azt, hogy ahogyan kis gyermekeknél a pálcikák, korongok, pénzek kirakásából nyert soksok személyes tapasztalat segíti a megértést, az absztrakciót, úgy segíti tanítványainkat az alkotó tanulási helyzet a matematika tanulásának bármely fokán. „Ha a gyerek saját tapasztalatai alapján eredményesen alakított ki egy fogalmat, akkor megalkotott valamit, ami előzőleg nem létezett és ez a valami pszichológiai értelemben is beépül a személyiségébe."[5] Ez az övé. Ehhez azonban szükséges a matematikai tapasztalatok gazdag tárháza (vagy spontán, vagy magunk hozzuk létre), amelyben minden fogalom felépítéséhez több tapasztalat is jelen van, hogy absztrakció következzen be, ne csupán asszociáció.[6] És a tanár számára szükséges a tanítványok ismerete, annak felismerése, hogy ki hol tart a folyamatban, illetve milyen érzelmi és egyéb tényezők segíthetik, esetleg akadályozzák a munkát.

Az elvont fogalmak mellett egy másik nehezítő tényező a matematika sajátos szimbolikája. A matematika alkalmazza a szimbólumokat, de ugyanúgy nem azonos azokkal, ahogyan az irodalom sem azonos az ábécé betűivel. A matematikai tartalom megértése csak a formanyelv dekódolása után lehetséges. (Bár lehetőleg mindig elmondom/felírom az adott definíciót, tételt formanyelven és szavakban is, meg szoktam engedni, hogy tanítványaim válasszanak. Tapasztalatom szerint, aki szavakkal nem tudja értelmezni, annak a formanyelv csak memóriapróba. Ha egyáltalán foglalkozik vele.)

Hasznos lenne, ha a matematika tanításának különböző szintjein állók rendszeresen szóba állnának, állhatnának egymással (nemcsak ágazati szinten gondolom, hanem minden tanárra személyesen), hiszen a matematikai struktúrák egységesek. Alapozásnál is látni kell a célt és feljebb is ismerni kell az előzményeket. Hasznos lenne továbbá, ha a matematikatanárok (csakúgy, mint mások) meglátogatnák tanítványaikat más óráikon is, hogy lássák más helyzetekben, ismerjék meg mozgósítható tartalékaikat.

Hasznos továbbá a jó tanári stílus, amely megfelelő hangulatot teremt.

III. MI LEHET ÉRDEKES A MATEMATIKA ÓRÁN?

Természetesen mindenkinek más és más.

Sokan érdekesebbnek találnak egy matematikai problémát, ha annak gyakorlati megjelenési formájából indulhatnak ki. Az elvont matematika csak konkrét, lehetőleg az életből vett tartalommal megtöltve inspiráló számukra. Ez a tanításban annyit jelent, hogy érdemesebb egy problémát a hétköznapi előfordulásukban megjeleníteni. (Például: hányszor nagyobb átmérőjű pizzát kell vennünk ahhoz, hogy kétszer annyi ennivalónk legyen? Matematikusabban: hányszorosára kell növelnünk egy kör átmérőjét, hogy területe kétszeresére növekedjen? Vagy: igaz-e, hogy bármely hat fős társaságban vagy van három ember, akik ismerik egymást, vagy van három, akik nem? Tisztán matematikai nyelvezettel: igazoljuk, hogy egy hat szögpontú gráfban mindig van hárompontú teljes gráf, vagy annak komplementere!)

Vannak, akiket az villanyoz fel, hogy olyan ismereteket kapnak, amelyekkel más tudományok összefüggéseit könnyebben leírhatják.

Vannak, akiket szórakoztat, vagy éppen lenyűgöz a matematika története. A hosszú évezredek, amelyekre visszatekinthetünk, a meg nem értett zsenik, a diadalmas nagyságok, az őket körülvevő társadalmi közfelfogás, a bátor előretekintés, irigység, az emberen túli világ kérdései.

És végül vannak, akiket vagy játékos fejtörő feladatokkal, vagy kihívást jelentő problémákkal, vagy rejtvény kinézetű feladatokkal lehet felvillanyozni.

Három téma köré csoportosítottam módszertani alapállásomat, a gyakorlatban megjeleníteni segítő néhány ötletemet, amelyekkel a matematika iránti affinitás fokozható: **1) haszonelvűeknek** a matematika hasznossága és más tudományágakkal való kapcsolata alapján, **2) emberközpontú és filozofikus hajlamúak számára** a matematika története alapján, **3) ínyenceknek** pedig a matematika belső szépsége szerint. Mindezeket természetesen a teljesség igénye nélkül, hiszen a dolgozat szabott keretei többet nem tesznek lehetővé. Hozzátéve, hogy bár speciális matematika tagozatos osztályban, fakultáción és „gyógymatek”-on is működő, kipróbált dolgokat ajánlok, de jó képességű, speciális, vagy fakultációs csoportokban – legalábbis a matematikai tartalmat és annak mélységét illetően – ennél természetesen sokkal több is megcélozható. Hawking egyik könyvének előszavában olvastam, hogy minden egyes matematikai képlet felezi az olvasók addigi számát. Ezt is szem előtt tartva írtam a továbbiakat.

III.1. Haszonelvűség és alkalmazások

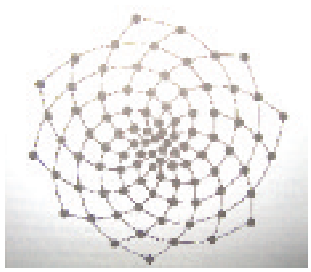
Manapság szokás mindent a hasznossága alapján megítélni. Tanítványaim is gyakran teszik fel a kérdést: „Mire jó ez?” Általában – legalábbis középiskolában – nem értek egyet az olyan utilitarista szemlélettel, hogy valami csak akkor értékes, azaz megtanulandó, ha azonnal látjuk tárgyiasult eredményét: olcsóbb lesz a hamburger, előbb kapok jogosítványt és hasonlók. Ennek ellenére belátom, hogy vannak emberek, tanítványaim között is szép számmal, akikre az első jó benyomást akkor teszem, ha a matematika ilyesfajta hasznosságával érvelek. Természetesen ebben a szituációban nem számíthatjuk érdemi érvnek, hogy egyes matematikai eljárások milyen jól segítik a fizika órai vagy a felsőbb matematikai feladatok megoldását, vagy hogy az érettségin is ezt kell tudni. Csakis az iskolai követelményektől függetlenül, a természetben vagy a társadalomban mutatkozó jelenségek és problémák jöhetnek szóba, amelyeknek általában nem az értelmezésében, hanem inkább a leírásában, esetleg megoldásában segít a matematika.

III.1.1. Kezdjük a „természet számai”[7]-val és mintáival

Legyen az első a **π.** Nem fog velünk szembe jönni a hipermarketben és az erdőben sem, mégis a természet által az embereknek felkínált számról van szó. A kör kerületének és területének kiszámításakor bukkantak rá. A kerület, periféria görög szó kezdőbetűjével jelölt számról szinte mindenki tudja elemi tanulmányai óta, hogy kb. 3,141592… kezdetű végtelen, nem szakaszos (azaz ismétlődést nem tartalmazó) tizedes tört. Sokezer éve izgatja a matematikával foglalkozókat, hogy elegendő pontossággal tudják megadni tizedesjegyeit. Eleinte a kör kerületének kiszámításához szükséges pontosságra törekedtek, aztán később már csak úgy, a kihívás szépsége miatt kerestek további jegyeket. Foglalkoztak vele az egyiptomiak, indiaiak, kínaiak, perzsák, görögök, úgyszólván mindenütt, ahol matematikát műveltek. Meglepően jó eredményre jutottak, amit ma, a számítógép korában sem lehet eléggé hangsúlyozni. Kr.e. kb. 300-ban már három tizedesjegy pontossággal ismerték, egy perzsa matematikus tizenhat tizedesjegyre számította ki, egy Ludolph van Ceulen nevű holland vívómester pedig 1610 körül 35 tizedesjegyig határozta meg a π értékét! Ezért szokás ma is Ludolph-féle számnak nevezni. A 18. században bizonyították, hogy irracionális, azaz nem írható fel két egész szám hányadosaként, a 19. században pedig azt, hogy transzcendens, azaz hogy racionális együtthatójú algebrai egyenletek gyöke nem lehet, ez pedig egyet jelent azzal, hogy euklideszi szerkesztéssel (azaz csak körzővel és egyélű vonalzóval) nem lehet π hosszúságú szakaszt szerkeszteni. Sokáig gyakorlati hasznot is hozott az újabb tizedesjegyek megtalálása: titkosításra használták. 1974 óta már egymillió fölött van ismert jegyeinek száma, ami azonban semmit nem jelent a többi, végtelen sok tizedesjegyre nézve.

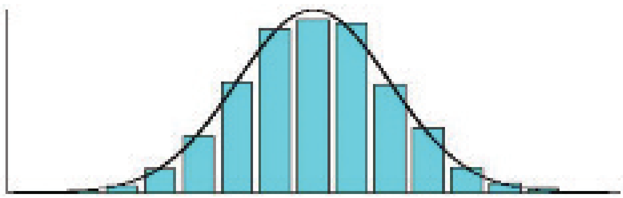
Az előzőhöz hasonlóan transzcendens szám az **e.** Euler tiszteletére nevezték el neve kezdőbetűjével azt a számot, amely az (1+1/n)n sorozat határértéke, azaz, minél nagyobb az n, annál jobban közelít a kifejezés értéke az e=2,718 281 828 … számhoz. Ez a szám, mint a fenti sorozat határértéke talán még érdektelen is lehetne, ha nem lenne a matematika és a természet egyik legfontosabb száma azáltal, hogy lépten-nyomon visszaköszön. Talán kamatos kamat számítási problémák megoldása közben bukkantak rá, azóta pedig sok matematikai határértékprobléma megoldásában vezetett eredményhez. Egészen rejtélyes módon a természet is ismeri ezt a számot. A természet sok folyamatának leírására használható, így pl. a radioaktív bomlási sorok, ozmózisnyomás, a reakciósebességi állandó hőmérsékletfüggése, populációgenetikai és ökológiai problémák, a gejzírek vizének hőmérséklete, a gejzírek kitörésének periódusideje, a telített vízgőzök sűrűsége, a vízfelszín alatti hullámok amplitúdójának mélységfüggése, a légnyomás magasságtól való függése. Olyannyira gyakori, hogy az e alapszámú logaritmus a hagyományos logex jelölés helyett egy rövidebb, könnyebben írható jelölést kapott, az lnx-et, (azaz logaritmus naturalis x). Úgy is hívjuk, hogy az e a természetes alapú logaritmus alapszáma. Mitől természetes? A természet könyve a matematika nyelvén íródott – mondják. Honnan tudják a természeti jelenségek a matematikát? Ezek a gondolatok, ezek a kérdések el kell hogy hangozzanak legalább egyszer minden középiskolás előtt. (Tapasztalatom szerint a hely-, út-, cél- és küldeteskereső kamaszok, ifjak fogékonyak is ilyesfajta gondolatok továbbvitelére.)

Bernoulli-, Fibonacci-, aranymetszeti számok. Majdnem minden virág szirmainak számát megtalálni a következő furcsa sorozatban: 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; …?[8] (A liliomé 3, a boglárkáé 5, a szarkalábé 8, a gólyahíré 13, az őszirózsáé 21, a legtöbb százszorszépé 34, 55 vagy 89.)[9] Semmilyen más szám nem fordul elő ilyen gyakorisággal. Vajon miért? (Ezt a speciális számsorozatot érdekes összefüggéseivel már sok évszázaddal ezelőtt észrevették, előbukkant már Fibonacci (1170?–1240?) munkásságában, egy nyúlpopuláció növekedésének vizsgálatával kapcsolatos problémában. Az ő tiszteletére nevezzük ma is Fibonacci-sorozatnak.) Ezek a számok minden más számnál gyakrabban jelennek meg a növényvilágban: hordozzák a napraforgó tányérján Bernoulli-spirális alakban elhelyezkedő magocskák, az ananász pikkelyei, a fenyőtobozok, a növények friss hajtásaik csúcsán, és számtalan más helyen, ahol a szép mintákra fogékony megfigyelőt gyönyörködtetik spirálisaikkal.[10]



Ha a fenti számsorozat szomszédos számainak hányadosát tekintjük, azt vehetjük észre, hogy minél nagyobb a vizsgált elemek sorszáma, annál jobban közelít ez a hányados a 0,618034-hez (pl. 34/55=0,618181; 55/89=0,617977; 233/377=0,618037). Ez a határérték pedig nem más, mint a híres aranymetszeti szám, a (√5-1)/2=0,618034….[11]

A **Gauss-eloszlás** haranggörbéje már közismert, gyakran csak „normál-eloszlásnak" nevezzük (lásd az alábbi ábrát).



A normális eloszlásnak egyetlen maximuma van, és ennek helye egybeesik az átlaggal, továbbá az átlag felett ugyanannyian vannak, mint alatta. A természetben mutatkozó jelenségek, a növény- és állatvilág jellemzőinek leírásakor vették észre, ma már az emberek közötti jelenségekre is ismerjük, sőt az emberek kognitív tevékenységeire is hasznosíthatónak bizonyult. A józan pedagógiai felfogás szerint a tanulócsoportokat úgy kell szervezni, hogy egy osztályban vagy csoportban a tanulók képességek tekintetében (lehetőleg kis szélességű) normális eloszlással legyenek jellemezhetők. Az egészséges emberi közösség kialakulása szempontjából ez a legalkalmasabb eloszlás, amelynél a legkiválóbbak és a leggyengébbek is belátható távolságban vannak a derékhadtól. Ilyen eloszlás esetén a legjobbak tudják húzni a többit és őket is hajtja a derékhad, ugyanakkor a leggyengébbek sem szakadnak le, mert van reményük, hogy a mezőnyben maradhatnak. A minimumot mutató eloszlás a közösségek spontán szegregációját vonja maga után, nemcsak az iskolában, hanem az egész társadalomban és a bioszférában is.

Mi ez a rejtély? Honnan tudja a növény- és állatvilág a matematikát? A gének hordozzák így az információt? Miért éppen ezt, és miért nem változnak rugalmasabban? Lehet, hogy az evolúció a természetesen adódó matematikai mintákkal kezdte és a természetes kiválasztódással hangolta be őket? És miért tartják évezredek óta a harmónia csúcsának a különböző művészetekben megmutatkozó arányt az emberek? Újra és újra kérdések. Kérdések, amelyekre a válasz talán rejtelmes. Vagy éppen nagyon is egyértelmű.

III.1.2. Hasznosság

A hasznosság a területszámítás, az adózás, a mérnöki munkák területéről már évezredek óta vitathatatlan. A tudományok szolgálóleányaként legnyilvánvalóbban a fizikusok, kémikusok tartják számon a matematikát, de ma már biológia, orvosi kutatások, térképészek, meteorológusok, zeneesztéták, történészek, nyelvészek sem nélkülözhetik. Égbenyúló katedrálisok vagy szépívű hidak láttán nincs, aki vitatná a számítások szükségességét. Atomerőmű, vegyi üzemek vagy Mars-szonda üzemeltetése, de még a meteorológia sem megy számítások nélkül. De a leghétköznapibb ember mindennapjai sem.

A prímszámokról és a **számelmélet alaptételé**ről kevesen tudják[12], hogy mindennapjainknak milyen húsbavágó kérdései vezetnek ezekhez a száraznak és haszontalannak is beállítható kérdésekhez. (Prímszámok azok a természetes számok, amelyeknek pontosan két osztójuk van: az egy és önmaguk; a többi, azaz a több osztóval rendelkező, összetett számok szorzattá bontásának, azaz prímfaktorizációjának egyértelműségével foglalkozik az említett tétel.) A titkos kódolás, ipari kémkedés, banki biztonsági rendszerek múlnak azon, ki találja meg előbb az adott informatikai segédeszközök használatával elérhető legnagyobb prímszámot, illetve egy adott szám prímfaktorizációját. (Bankkártyája manapság szinte mindenkinek van, és természetesen vígan használhatja anélkül, hogy valaha is szembesítették volna azzal, min múlik a rendszer biztonsága, mégis úgy tapasztalom, ez a fajta hasznosság enyhítő körülménynek számít a prímszámok megtanulásának kényszerében. Egy megfelelően nagy, mondjuk 100 jegyű számról eldönteni, hogy prím-e, illetve ha nem az, melyek a prímosztói, pusztán próbálkozásokkal nem fog menni véges időben.) Ezen a prímfaktorizáción és annak bonyolultságán alapulnak számítógépes játékok, digitális kommunikációnk biztonsági elemei, az elektronikus aláírás, hitelesítés, vízjel stb.[13] Ha az osztályban sikerült felvillanyozni néhány érdeklődőt, meg lehet kérni, nézzenek utána – például az interneten – mekkora a ma ismert legnagyobb prímszám. (A neten való böngészésnek jó hozadéka lehet, hogy matematikát népszerűsítő, érdekes, játékos honlapokra bukkannak. Annak érdekében, hogy a „barangolás” a matematika témáinak környékén maradjon, állandó felajánlásom a hálóról megismert, iskolai témáinkkal kapcsolatos újabb ismeretek, bizonyítások, érdekességek – de csak a valóban megértett, elsajátított ismeretek – jutalmazása. Nemcsak, vagy nem feltétlenül jeggyel, hanem lelkes közkinccsé tétellel.)

Igazán csak apró fricskaként jegyzem meg, hogy a prímszámok elméletének egyik legkiemelkedőbb kutatója, Godfrey Hardy azt írja magáról *Egy matematikus védekezése* c. könyvében:[14] *„Soha nem tettem semmi hasznosat. Semelyik felfedezésem sem volt közvetlenül vagy közvetve jó vagy rossz hatással a világ folyására, és nem valószínű, hogy valaha hatással lesz…”* Ma már látjuk, tudjuk, hogy ami teljesen haszontalannak tűnik a felfedezés pillanatában, később, esetleg évszázadok múltán akár hasznos is lehet.

Bolyai János munkássága is az előző gondolatot erősíti. (Ezt nekünk, magyaroknak mindenkinél jobban illik tudni.) Az euklideszi hagyománnyal bizonyos értelemben szakító lángelme olyan új geometriát alkotott, amely zsenialitás, ha látták is néhányan, nem tudott áttörni a kor uralkodó filozófiai nézetén, amely szerint a valós tér „a priori" euklidészi. Abban a tudatvilágban őrült ötlet volt egy másik, olyan geometria gondolata, amelyben a háromszög belső szögösszege nem 180º… És eljött az idő, amikor csillagászati léptékű szögmérésekből az derült ki, hogy a valós világban (nagy távolságokban) a háromszögek belső szögösszege nem is 180º. Jóllehet, szegény Bolyai nem érhette meg ezt az eredményt, és az iskolákban a földi méretekben való hasznossága miatt még mindig az euklidészi geometriát tanítjuk, mégis érdemes elgondolkodni azon, hogy mi is a hasznos valójában? Ki tudja ezt megítélni és mi alapján?

A szerencsejátékok és a biztosítások hívták életre a **valószínűség-számítás**t. A valószínűség fogalma már az antik görög filozófiában szerepelt. Az a gondolat, hogy a természetben tapasztalható törvényszerűségek a véletlenek tömegén keresztül érvényesülnek, az ókori materialistáknál szerepelt először. Később a kockajátékokkal kapcsolatos feladatokra, biztosítási és életjáradékkal kapcsolatos problémák megoldására alkalmazták. Mára a modern tudomány felfedezte, hogy az ún. valószínűségi szemlélet magyarázza meg helyesen a bennünket körülvevő világegyetem jelenségeit, és az élővilágban lezajló folyamatokat is ez írja le jól.

Nagy pénzek, sorsok fordulhatnak meg olykor egy-egy kötvény vagy fogadás tétjén. A pénz megszerzése, megtartása új lendületet adott a valószínűség-számítás további fejlődéséhez. Ma már a szállodai vagy repülőtéri foglalások rendszere is épít a valószínűségi vizsgálatok eredményeire, sorban állási problémákat írnak le segítségével. Állami szerencsejátékok működnek (lottó, totó, kenó stb.), és állami kiadású sorsjegyeket árusítanak, nyilván megbízható matematikai apparátusra építve. És vajon legalább tanítványaink megértik-e, mit jelent, hogy ha egy sorsjegyjátékon a nyerési esély 1:4,25?

Manapság újságolvasó emberként sem lehetünk meg anélkül, hogy statisztikai adatokat valamelyest értelmezni tudnánk. A hétköznapi használók is, és a hivatásosak is (hivatalok, elemzők, stratégák, újságírók, műszaki minőségellenőrzők) a matematikának egy nem túlzottan régi, a valószínűség-számításból kifejlődött és sokaságokra jól alkalmazható területéből merítenek. Ez a matematikai **statisztika.** Látjuk, halljuk, alkalmazzuk, de vajon értjük-e, hogy mit jellemez az átlag és mit a szórás, mi a korreláció, mi a szignifikancia? Fontos, hiszen ha önálló véleménnyel rendelkező újságolvasók/tévénézők lennénk, kevésbé lennénk kiszolgáltatva számtrükköknek. A statisztika alapvető feladata tapasztalati adatok gyűjtése (ilyen pl. a közvélemény-kutatás, időjárási adatok), ezek rendezése, értékelése, mintákból következtetni az egész sokaság valószínűségeire, eloszlás- és sűrűségfüggvényére, azok paramétereire. Vannak, akik úgy tartják, a statisztikával bármit be lehet bizonyítani, azaz a statisztika hazudik. A statisztikát valóban el lehet torzítani, az adatgyűjtés körének megválasztásával, nem megfelelő mutatók használatával. Ezért fontos, hogy tisztában legyünk a statisztikai mutatók jellemzőivel, diagramok jelentésével, megértsük az elemzéseket, észrevegyük, ha be akarnak csapni bennünket, és a szórólapok látványos grafikonjai mögé lássunk.

III.2. A matematika történetéből és filozófiájából

Vég nélkül sorolhatók a matematika történetének meglepő, tanulságos, mulatságos, vagy éppen csak tényszerű történetei, amelyekkel emberközelivé tehetők a tudomány eredményei. Még a legközömbösebb tanítványok is rácsodálkoznak a különböző korok különböző fejlettségű gondolkodási szokásaira, a leírás eszközeire, nyelvezetére. A matematika, mint emberi alkotás, fejlődik az emberi társadalmakkal, az évezredekkel, és ahogyan a társadalmak és a technika változik, úgy változik a matematika helye is a társadalomban. (Elég csak annyit mondani, hogy ma már – érthető okokból – sem az uralkodók, sem az egyház nem támogatja különösebben a tudományágat, pedig tették azt a tudományok egyedüli letéteményeseiként sok évszázadon át.)

Két híressé vált történetet érdemes tanítványainknak is továbbadni. Mindekettőben egy matamatikát tanulni vágyó uralkodó jelenik meg. Az egyik: **Ptolemaiosz.** Amikor a nagy király azt kérdezte Euklidesztől, hogy a geometria tanulásának nincs-e könnyebb, rövidebb útja, mint amit a tudós *Elemek* c. munkája kínál, a nagy geométer így válaszolt: *„A geometriához nem vezet királyi út.”* Ez lett Sain Márton nagyívű matematikatörténet könyvének címe is. A másik uralkodó: **Krisztina** svéd királynő, aki 1649-ben Stockholmba hívja **Descartes**-ot. A királynő kulturális nagyhatalommá kívánta emelni Svédországot, és ennek útját a filozófus-matematikus Descartes meghívásával, a svéd királyi akadémia megalapításával látta járhatónak. Krisztina királynő a filozófia foglalkozások kezdetét hajnali öt órára tűzte ki. A zord északi tél mellett bizonyára ez is egyik oka volt annak, hogy a gyenge egészségű tudós a meghívást követő évben tüdőgyulladást kapott és meghalt. A múltban különböző módon alakulhatott a matematikával foglalkozó emberek munkája, foglalkozása: volt közöttük szerzetes, majd pápa (Gerbert, 1000 körül), érsek (Bradwardine, 1325), orvos (Cardano, 1550), jogtudós (Viete, 1570), vívómester (van Ceulen, 1610), ügyvéd (Fermat, 1635), hivatalnok (Ramanujan, 1910) és még ki tudja hányféle érdekes ember.[15] Ma sem kizárt, hogy bárki, akár passzióból is matematikus legyen, de a „másodállású” matematikusság, az elszigetelt kutatás manapság nemigen vezet eredményre.

Ha a matematika változásainak forradalmi jelentőségű, vagy éppen „csak érdekes” pillanatait felvillantjuk, bizonyítékát adhatjuk annak, hogy az emberiség kulturális örökségéből szép és izgalmas kérdéseket felvető rész a matematikáé. Bármelyik témakörhöz találhatunk történeti adalékokat, sőt kitűzhetünk érdekes témákat lelkesen könyvtározó vagy internetező tanítványainknak, akik olykor buzgóbb forráskutatók a matematikatanároknál. (Például: „A Szentírás számai", „A számrendszerek és a katonai alakulatok szervezése", „Nők a matematikában".)

III.2.1. Minden valamire való kultúrában foglalkoztak matematikával.

Miért? Eleinte nyilván célszerűségből, hiszen szükséges volt a mennyiségek összehasonlítása valamilyen fajta számlálás segítségével: 1 feleség, 2 mamut, 3 bogyó, stb. Fejlettebb kultúrákban megjelent az adózás, az építkezések, a kereskedelem, az átváltások által életre hívott matematikai problémák sokasága: területszámítás, kamat, törtek, stb. Ez a folyamat nem állt meg, és függetlenül attól, hogy a matematika a gyakorlati problémák megoldása közben önálló, absztrakt életre kelt, a mai napig újabb problémákkal kopogtatnak a hétköznapok. Gondoljunk a szerencsejáték- és biztosítási matematikára, vagy a legújabb, a számítógépek által felvetett kérdésekre, a bonyolultság és a véletlen új elméleteire.

Az emberiséget az élet nevelte a számolásra. A legrégibb, számlálást rögzítő bizonyíték egy 30 000 éves farkaslábszárcsont, amelyet a csehországi Vestonicében találtak 1937-ben. (A csontra 55 rovás van felvésve, ebből 25 ötös csoportokban.)[16] Ez régebbi, mint az első technikai találmányok, a fémek, vagy a kerék. A számrovás megelőzte a számok elnevezését. Nyelvi emlékek mutatják azt a folyamatot, amelyen minden nép átment, az „1, 2, sok" megkülönböztetésének fokozatát. Sok mai nyelv is megkülönbözteti az egyes, kettes és a (kettőnél több) többes számot. Ilyenek a héber, arab és rokon nyelveink közül a vogul. Kialakult tehát a számfogalom, a halmazok összehasonlításának képessége (több/kevesebb) és az igény az adatok rögzítésére. A rovások után megjelentek a számok jelei is. A hieroglifák tanúsága szerint Kr. e. kb. 3000 évvel már 100 000-ig jelölték a számokat[17].

Egyiptomban, Babilonban is virágzott az alkalmazott matematika, de igazi tudománnyá a görögök tették azáltal, hogy a számsorokat, geometriai alakzatokat a gyakorlati kérdésektől független, önálló életre keltették. Különösen nagy jelentőségű az alapfogalmak, definíciók, axiómák, tételek, bizonyítások rendszere. Euklidész forradalmi munkája, hogy rendszerbe foglalta az addig ismert eredményeket, a tételeket bizonyította, visszavezetve mind egyszerűbb és egyszerűbb állításokra, ameddig csak lehetett. És ahol már nem lehetett tovább menni, azaz sem bizonyítani, sem cáfolni nem lehetett, ott azt mondta: ezek szemléletünkből következő alapigazságok (axiómák). Az axiómák, különösen az ötödik (a párhuzamossági axióma), élénk érdeklődést váltottak ki két évezred sok matematikusából, a bizonyítás, vagy a cáfolat lehetősége izgatta mindannyiuk fantáziáját. De az euklideszi alaptételeket sem cáfolni, sem bizonyítani nem sikerült senkinek. Bolyai János (és tőle függetlenül dolgozó kortársa, Lobacsevszkij) zsenialitása abban állt, hogy megtartva a többi euklideszi axiómát, a párhuzamosságit nem cáfolni vagy bizonyítani próbálta, hanem kicserélte egy másikra[18], és az új axiómarendszer alappillléreire építette fel geometriáját. Egy, az euklideszitől különböző, ellentmondásmentes rendszer jött létre, és adott új távlatokat a matematikának.

A bizonyításigény nem mindenkiben él („Ó, tanárnő, elhisszük mi azt magának…”, vagy „de hát ez nyilvánvaló, látszik”), de kialakítható. A görögök nagy újításának, az elméleti indoklásnak szükségességét megértetni tanítványainkkal nem könnyű feladat, de a görögök híres paradoxonai[19], vagy a hétköznapi kérdések ebben is segíthetnek. (Diák: „Miért hármas a feleletem?” Tanár: „Higgye csak el nekem, hiszen nyilvánvaló.”)

III.2.2. A magyarság matematikai műveltsége

Néhány mondat erejéig emlékezzünk meg a magyarság matematikai műveltségének kialakulásáról. Mivel matematikai jellegű írásos emlékeink legkorábbról a 11. századból valók, ezért a nyelvészek kutatásaira tudunk csak támaszkodni. Számneveink a legősibb szókincsünkhöz tartoznak. A két, három, négy, öt, hat és száz tőszámneveknek közös gyökere van a finnugor nyelvekben, ami azt jelenti, hogy kialakulásukkor a finnugor népek még együtt voltak és hatos számrendszert használtak. A „hét” számnév például már csak a szűkebb, ugor családban közös. Mivel a hétnapos időtartamot is jelöli, ekkor már valószínű a hetes számrendszer használata. A hetes számrendszer emlékeit őrzi a hét vezér, a hetedhét ország, a hétfejű sárkány, stb. Az Urál-vidéki tartózkodás idején már a – valószínűleg irániaktól átvett – tízes számrendszert használták. (Az eredet más elméletei is foglalkoznak a számnevek használatával.) A magyarság matematikai műveltsége a pásztortársadalom primitív igényeinek felelt meg.[20]

Magyarország a 15. században kapcsolódott be a hindu-arab számjegyírás rendszerébe. Abba a rendszerbe, amelynek európai elterjedése az egyetlen matematikus pápa nevéhez kapcsolható: szerzetesnevén Gerbert, aki (999-ben) II. Szilveszter néven lett pápa, ő küldte Szent István királyunknak a korona felső részét.[21]

Az első írásos matematikai emlék Szent Gellért püspöktől származik, 1044-ből.

Lényeges, hogy tanítványaink előtt felfejtődjön az emberi gondolkodás történetének a matematikát magába foglaló, nagyobb íve is, és ennek hatására elgondolkodjanak filozofikusabb kérdéseken is. Például az adózási, bérfizetési, területszámítási kérdések által előhívott matematikai fogalmak miért keltek önálló életre a görögök fejében és miért csak a konkrét elemi szabályok gyűjteményéeig jutottak az egyiptomiak? Milyen gondolkodási minták vannak az emberiségben, ha térben és időben össze nem kapcsolt társadalmak ugyanazokat a matematikai gondolkodásbeli állomásokat járják be, megalitikus építményeik –megfelelő mértékegységben mérve – ugyanazokat az összefüggéseket mutatják, vagy az egymástól függetlenül dolgozó tudósok hasonló, sőt azonos megállapításokhoz jutnak? Hol van tulajdonképpen a matematika? A könyvekben? A fejekben? Akár a napraforgó génjeiben is, csak mert magjai a Bernoulli spirális elrendezése szerint teremnek? Vagy Stonehenge köveiben? Vagy a szimmetrikus virágszirmokban? Törvényszerűségeit az ember találja ki és erőlteti rá a világra, vagy az embertől függetlenül is léteznek? Más intelligenciákban – ha ilyenek léteznek – ugyanilyen összefüggéseket fedeznének fel? A 20. század szovjet tudósa, Safarjevics, Göttingenben a Tudományos Akadémia díjának átvételekor fogalmazta meg előadásában a következőt: „*A matematikára vetett felületes pillantás azt a benyomást keltheti, hogy az sok, különböző kontinensen és korszakokban szétszórt tudós egyedi erőfeszítéseinek eredménye. Belső logikája inkább egyetlen intellektus munkájára emlékeztet, aki szisztematikusan és következetesen gondolkodik, és csupán eszközként használja az emberi individuumok sokféleségét. Zenekarra hasonlít, amely valakinek a szimfóniáját adja elő.*”[22] A hasonlat talán meglepő egy szovjet tudós szájából, de a gondolat aligha új, hiszen a görög filozófusok és matematikusok is azt gondolták, hogy a geometria–aritmetika–csillagászat–zene az égi szférákba vezeti az értelmet. Később, a középkor quadriviumában is megjelenik ez a gondolat.

III.2.3. Híres matematikusok

Az általános kérdések újra és újra emlegetése a matematika órán arra hivatottak, hogy életben tartsák a képet a matematikáról: az emberi szellem különleges alkotása, amely folyamatosan épül ma is. És ez a palota csodálható úgy is, ha nem tudunk belépni minden termébe, ha nem látjuk tornyai magasát. De egész bizonyosan akadnak olyan termek, amelyekbe bátran beléphetünk, otthonosan fogjuk érezni magunkat. És hogy a palotát járva tanítványaink is minél több ismerőssel találkozhassanak, ne legyünk restek híres matematikusokról mesélni: hogy éltek, miről gondolkodtak, milyen érdekes tulajdonságaik, szokásaik teszik számukra is megjegyezhetővé alakjukat.

Az előző részben említettem a számelmélet egyik nagy elméjét, **Hardy**t. Nos, ő az egész számokat már kora gyermekkorában szerette és érdeklődött tulajdonságaik iránt. Két évesen (!) már le tudta írni a számokat egymillióig, később a templomban az énekek számának prímosztóit keresve szórakoztatta magát.

Ha a számelmélet nagyjait emlegetjük, nem hagyható ki a néhány éve elhunyt **Erdős Pál** neve. Nemcsak mert magyar, és nemcsak mert igazi különc volt, hanem mert nagyon sokat tett a matematikai problémák népszerűsítéséért és azért, hogy a matematika kutatása csoportmunka legyen. Kiváló elme volt. Számtalan problémát tűzött ki megoldásra 5-500 $ díjazásért és sokra kapott is megoldást. Ő maga minden pénzét jótékony célra fordította, diákokat támogatott, nem tartott fenn lakást sehol a világon, mindig váratlanul bukkant fel a világ bármely sarkán élő professzoroknál, hogy egy-egy problémát együtt gondoljanak tovább. A szellemet messze a testi valóság fölé helyezte, testedzésre, gyakorlatias dolgokra ügyet sem vetett (soha nem tudott felbontani pl. egy doboz gyümölcslevet). A szárnyaló elméjű tudós fejből tudta minden kollégájának telefonszámát, azonban mindannyiukat vezetéknéven szólította, keresztnevüket talán nem is tudta. (Húsz éven át közeli munkatársa írja róla: „Mindenkit vezetéknevén szólított, kivéve Tom Trottert. Őt így szólította: Bill.”[23]) Folyamatosan ajzószerekkel élt, ezek nélkül élni ugyan tudott, de –ahogyan ő mondta – alkotni nem, matematikai problémák megoldása nélkül pedig számára értelmetlen volt az élet. Paul Hoffman remek stílusban írt könyvet róla *The Man, who loved only numbers* címmel (magyar fordítása *Prímember* címmel jelent meg), igazi élmény a nem matematikusok számára is. Nemcsak a tudós különcségei vagy nagyvonalú jótékonysága, vagy akár zsenialitása miatt, hanem mert bepillantást ad a matematikusok életébe, a klasszikus problémák és a kutató elmék világába.

Még mindig a számelmélet képviselői között maradva, csak bő kétezer évvel korábbról: **Pitagorasz.** Nevéről ismert tételén kívül (amely egyébként nem tőle származik, hiszen már egyiptomi és babiloni felhasználása is ismert) számelméleti összefüggések felfedezése kötődik hozzá és tanítványainak köréhez. Maga Pitagorasz az egész számokat és ezek törtjeit tanulmányozta, többel közülük misztikus kapcsolatot ápolt, tulajdonságokkal ruházta fel őket (jóindulat, tökéletesség, szerencse, stb). Barátságosnak nevezte a 220-at és a 284-et, mert az egyik valódi (önmagán kívüli) osztóinak összege a másik számot adja. Több ilyen számpárt nem talált.[24] Pitagorasz életét misztikum vette körül, legendák övezték, amelyek egy részét saját maga kezdte terjeszteni. A világ harmóniájának leírását az általa bálványozott egész számok között mutatkozó szabályszerűségekkel vélte megoldhatónak. Egy legenda szerint amikor egy tanítványa azzal próbálta megingatni világképét, hogy az egységnyi oldalú négyzet átlójának hossza, a $\sqrt{2}$ nem írható fel sem egész számként, sem egyszerű törtként, nagyon zaklatott lett és titoktartásra kötelezte tanítványait. A legenda szerint a titoktartást később megszegő tanítványt Pitagorasz kivégeztette. Ma pedig minden hetedikesnek megtanítjuk, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális, és minden kilencedikesnek bizonyítjuk is…

Ramanujan indiai matamatikus sem maradhat ki a számelmélet érdekes emberei közül. Briliáns elme volt, autodidakta matematikus. Szegényes hivatalnok állása mellett minden idejét a matematikának szentelte. Az európai matematikai életbe 1914-ben, Hardynak írt levele után került, aki felismerve a lángelmét, felkarolta és Londonban hosszabb ideig dolgoztak együtt. Intuitív módszerét még Hardy is figyelemre méltónak tartotta, olyannyira, hogy mikor megkérdezték tőle (Hardytól), hogy véleménye szerint ő mivel gazdagította legjobban a matematikát, azt válaszolta: Ramanujan felfedezésével. Ramanujan minden számot személyes jóbarátjának tekintett és elképesztő módon ismerte tulajdonságaikat. Egyszer egy taxi 1729-es számáról megjegyezte: „Ez nagyon érdekes szám. Ez a legkisebb érték, ami kétféleképpen bontható köbszámok összegére (12 és 1, vagy 10 és 9 köbének összegére).”[25]

Matematikus sírkövek[26]

Az előző fejezetben már említett **Jacob Bernoulli** (1654–1705) halálos ágyán azt kérte, sírkövére az általa felfedezett logaritmikus spirálist véssék és az *Eadam mutata resurgo* (megváltozva bár, de ugyanannak támadok fel) feliratot. Hitvallása mellett ez a mondat az érdekes görbének arra a tulajdonságára utal, hogy a logaritmikus spirálisból származtatott görbék közül több újból logaritmikus spirális.

Gauss (1777–1855) munkássága nyomán megváltozott a matematikának szinte minden ága. Hatalmas felfedezései közül a legkedvesebb maradt elsőszülött gyermeke, a szabályos tizenhétszög szerkesztésének eljárása. Kívánsága, hogy sírkövére ezt véssék, nem teljesült, de szülővárosában, Braunschweigben emlékművének talapzata szabályos tizenhétszög alakú.

Ludolph van Ceulen (1540–1610) holland erődítményépítő, matematikus és vívómester síremléke a hollandiai Delft városkában áll, és rajta a nevét híressé tevő π jegyei láthatók. Ludolph számolta ki elsőként először húsz, aztán harmincöt tizedesjegyig a π értékét. (A 16. század végén ez óriási teljesítmény volt. Azóta nevezik a π számot Ludolph-féle számnak.)

Diophantosz (3. század) a görög geometriai hagyományokkal szakítva, aritmetikával foglalkozott, babiloni alapokra épített, amelyet továbbfejlesztett, és a 13 kötetes Arithmetika című munkáját hagyta az utókorra, amelynek csupán 6 kötete maradt meg. Életéről mindössze annyit tudunk, amennyit egy 10. századi bizánci antológia (ókori görög versek gyűjteménye), Diophantosz sírfeliratakénț közöl:[27]

Vén Diophantoszt rejti e kő. Bár ő maga szunnyad,
Megtanította a sírt, mondja el élte sorát. …

A folytatás egy matematikai feladat, melyet megoldva megkapjuk, hány évet élt a mester. A vers mint feladat a Jutalomjáték c. részben olvasható teljes szöveggel.

A középszerről, egy híres párbajról és az „írástudók" felelősségéről

A matematikusok és felfedezéseik sorsának alakulása olykor kalandos, olykor dicsőséges, de sajnos olykor szomorú is. Természetesen nincs sok értelme a „Mi lett volna, ha…?" típusú kérdések ismételgetésének, érdemes azonban elgondolkodni azon, mennyivel nagyobb léptékben haladt volna előre a tudomány és a boldogulás útján az emberiség, ha legalább a megértést, a segítő támogatást megkaphatná mindenki. Sokat vétenek büntetlenül (olykor csak butaságuk, vagy gyávaságuk, de olykor irigy rosszindulatuk miatt) az önző, középszerű emberek azzal, hogy a náluk különbeket igyekeznek lehúzni a maguk kisszerű világába.

Arkhimédész (Kr. e. 287?–212) halálát például egy, az alkotó elmét fel nem ismerő római katona okozta. A tudós gondolataiba merülve éppen köröket rajzolt a homokba, az odaérkező katona hívására az azóta szállóigévé lett mondattal válaszolt: *Noli turbare circulos meos!* (Ne zavard a köreimet!) A feldühödött római (Marcellus katonája) leszúrta. A sors fintora, hogy bár ezt a katonát vezére kizárta a hadseregből, egy későbbi csatában, Szürakuzánál, több mint két éven át éppen Arkhimédész gépeinek, csigasorainak, emelőinek és hajítógépeinek köszönhetően Marcellus nem tudta bevenni az ostromlott várost.

Galois (1811–1832) tragikusan rövid életét végigkísérik a meg nem értések, elutasítások sorozata. A 12 évesen iskolába kerülő fiú tanárait messze túlszárnyaló tehetséggel rendelkezett, ami az egyetlen, számára érdekes dolgot, a matematikát illeti. Középiskolai tanárai, nem értve meg eredeti gondolatait, a sablonokat próbálták rákényszeríteni, egyetemre pedig nem is kerülhetett, mert bizonyításait, gondolatait újszerűségük miatt több felvételijén érthetetlennek minősítették. Egy alkalommal, mikor 17 évesen harmadszor felvételizett és a szóbelin vizsgáztatója ostobaságnak nevezte gondolatmenetét[28], hirtelen haragjában a vizsgáztató fejéhez vágta a szivacsot és elkeseredetten elrohant. A meg nem értés fájdalma a forradalmi mozgalmakba sodorja, majd börtönbe, itteni megbetegedései miatt kórházba, majd egy feslett nő karjaiba kerül. Egy, a szerelmére tett megjegyzés miatt párbajozik, és 21 évesen meghal. De a fanatikus zseni a halála előtti éjszakán papírra vetette addigi felfedezéseit, amelyek jócskán megelőzték kortársai megértőképességét, és bár csak később ismerték el azokat, mégis mint a csoportelmélet legkiemelkedőbb alkotásait tartják számon mind a mai napig.

Gauss, akiről már volt szó ebben a fejezetben, szintén kiemelkedően tehetséges gyermekként indult, és szerencsés módon zsenijét felismerte és támogatta első tanítója. A szinte már klasszikussá vált történet szerint az osztatlan iskolában, ahogy ez annak idején lenni szokott, a tanító, amíg az egyik osztállyal foglalkozott, a többinek önálló munkát adott. Egy ilyen alkalommal a hatéves (!) Gauss csoportja önálló feladatul kapta a természetes számok összeadását 1-től 40-ig. A kis Gauss pillanatokon belül vitte a helyes eredményt palatáblájára írva: 820. A meglepett tanítónak elmagyarázta, mint magától értetődőt: az első és utolsó összege ugyanannyi, mint a második és az utolsó előtti összege, és így tovább. 40+1=39+2=… és 20 ilyen pár van, tehát az eredmény 20x41=820. Nos, a szegény nyergesmester gyermeke ettől kezdve a braunschweigi herceg támogatásával járt gimnáziumba, majd egyetemre. 19 évesen, egy sokkal általánosabb probléma igazolásával[29] jutott a matematikusokat 2000 év óta izgató problémának, a szabályos tizenhétszög szerkesztésének megoldásához. Gauss óriási munkakedvvel és töretlen lendülettel alkotott egy hosszú életen át, eredményei a matematikának is új lendületet adtak és neki magának is dicsőséget hoztak. Mégis, amikor a fiatal Bolyai János hozzá küldte bírálatra a „nem-euklideszi geometriát” megalapozó munkáját, válaszában saját kutatásaira hivatkozva a munka elsőségét vitatta, pedig ebben a témában nem publikálta gondolatait. A nagytekintélyű Gauss, akit a matematika fejedelmének szokás nevezni, bár valószínűleg felismerte a gondolatok forradalmiságát, nem karolta fel Bolyait, ezzel egyik oka lett a magyar tudós elszigetelődésének.

Euler (1704–1783), a matematika másik fejedelme, Gaussal ellentétben nagyvonalúan felkarolta az ifjú **Lagrange** felfedezését, és bár maga is tett megállapításokat abban a témában, nem vitatta Lagrange elsőségét, hanem átengedte a témát, még ötleteivel is támogatta, később pedig továbbfejlesztette Lagrange elméletét.

Az emberi természet megannyi érdekes megnyilvánulása, a körülmények, a történelem díszletei teszik olyan kalandosan fordulatossá, olyan lélegzetelállítóan izgalmassá, olykor pedig elgondolkodtatóvá a matematika történetét.

III.3. Matematikai mazsolák

III.3.1. Mit ér a józan ész?

Zénon híressé vált apóriáit érdemes újra és újra elővenni, akár mint találós kérdéseket. Vajon hogy lehet az, hogy egy bizonyos, előre rögzített helyre egyáltalán odaérünk, hiszen bárhol legyünk, mindig meg kell tennünk még a visszalévő út felét, majd annak a felét és így tovább. A felezések száma végtelen, az előttünk álló útszakaszok száma végtelen, tehát oda sem érhetnénk. Józan eszünk és tapasztalatunk szerint azonban odaérhetünk. Hogy van ez? A magyarázat egyszerű: végtelen sok tag összege is lehet véges. Látványos igazolásként rajzoljunk a táblára egy szakaszt, nevezzük 2 hosszúságúnak (hiszen az egység megválasztása tetszőleges). Ha ezt a szakaszt felezzük, előáll 1+1, a jobboldalit tovább felezve előáll 1+½+½. E két jobboldaliból is a jobboldalit tovább felezve előáll 1+½+¼+¼, majd a jobboldaliakat újra és újra tovább felezve adódik az 1+ ½+1/4+1/8+1/16+…$1/2^n$ +… összeg, amelyről már a kiindulás miatt is tudjuk, hogy 2, azaz véges.

A **végtelennel** nincs könnyű dolga a hétköznapi okoskodónak (H.O.). Nézzük csak például miből van több: természetes számból vagy páros számból? H.O. azonnal rávágná: nyilván párosból van kevesebb, hiszen csak minden második természetes szám páros. Mit mond erre a matematika? Vedd az első természetes számot (0) és rendeld hozzá az első páros számot (0), tedd ugyanezt a második természetes számmal (1) és a második párossal (2), majd így tovább:

$$
\begin{aligned}
0 &\leftrightarrow 0\\
1 &\leftrightarrow 2\\
2 &\leftrightarrow 4\\
3 &\leftrightarrow 6\\
&\dots\\
n &\leftrightarrow 2n
\end{aligned}
$$

Vagyis minden természetesnek van párja a párosból, minden párosnak a természetesből, sehonnan sem marad ki (ez a matematikában a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés), tehát ugyanannyian vannak. H.O. erre hitetlenkedve kiált fel: de hát a páros számok akkor is csak feleannyian vannak! Ja, igen, barátom – felelhetjük – a végtelen világa sok meglepetést rejt. Számodra tehát ez az első: a végtelenben a feleannyi is ugyanannyi, mint a kétszer annyi. Hát, bizony, erre aludni kell egyet-kettőt!

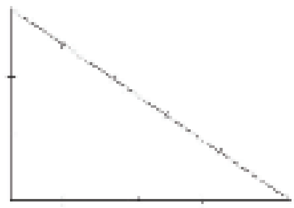
És ha a több alvás után leülepedni látszik, hogy a végtelenben minden máshogy viselkedik, ha már elfogadottnak tűnik, hogy ugyanannyi természetes szám van, mint egész, ugyanannyi, mint racionális, akkor azt is megmutathatjuk, hogy van nagyobb számosságú számhalmaz (a valós számoké). Megmutathatjuk, hogy a végtelenek sem mind egyformán végtelenek. Vannak „nagyobb" végtelenek: pl. a megszámlálhatónál nagyobb a kontinuum végtelen. Sőt…

A számkör felépítésének vizsgálgatása mindig kerekre nyit egy-két szemet. Igazi rácsodálkozások ezek. Hiszen a számok világától várják a legkevesebb meglepetést azok, akik kényelmi szempontokat részesítenek előnyben. Végtére is számolni már az óvodások is tudnak, kicsit tupírozzák negatív és törtszámokkal, a prímszámok gyökével, mint irracionálisokkal, π-vel, e-vel, és kész. Túl sok újat kár lenne várni. És mégis! Ha a valós számok halmazának számossága „nagyobb végtelen" mint a természetes számoké, akkor az csak az irracionálisaktól lehet, azon belül is a transzcendensektől. De hiszen ilyeneket alig ismerünk (π, e)! Hol vannak a többiek? Még nem találták volna meg őket? Na és mi a helyzet a számkör további bővítéseivel? Komplex számok, robbantott számok[30], stb. Vannak még további bővítések? Van határ egyáltalán? Bizony, még a számok világa is ilyen rejtelmes, kalandos, lehetőségekkel teli világ.

III.3.2. „Végy egy zsineget…" és tedd vele élményszerűbbé az órát!

Nemcsak a fejben/táblán végtelen sok lépésben, gondolatban megtett utakon járhatunk. Főleg, amennyiben nem a végtelent akarjuk célba venni. Több témában nyújthat segítséget a közönséges háztartási zsineg. Kicsit légy bűvész, kicsit show-man, de a cél csak az élményszerű szemléltetés legyen!

Pitagoraszi számhármasok. Már az ókori Egyiptomban ismerték azt az eljárást, amit gyermekként ügyes mesteremberektől láthattam magam is: a derékszög kimérését szögmérő nélkül, hosszúságegységek felhasználásával. Egy megfelelő méretű madzagra felmértek 3 egységet (a mesterek pl. decimétert) itt egy csomót kötöttek, innen kezdve négy egységet, itt újabb csomó, innen öt egységet, a végén újabb csomóval. Ha a madzag elejét az utolsó csomóhoz igazítva úgy alkottak háromszöget, hogy annak egy-egy csúcsa a közbülső csomóknál legyen, derékszögű háromszög jött létre. (Persze, hiszen a 3;4;5 pitagoraszi számhármas, vagyis a két kisebbik szám négyzetösszege a harmadik négyzetével egyezik meg, azaz belőlük derékszögű háromszög alkotható. A derékszög az öt egységnyi oldallal szemközt keletkezik.)

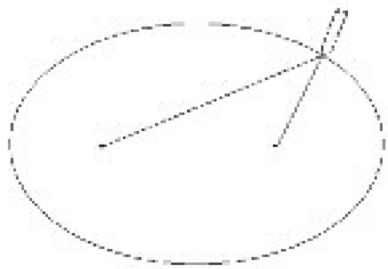


A mesterek munkáihoz szükséges pontosságban az eljárás megadja a derékszöget. Ma már a mesterek máshogy dolgoznak, viszont az eljárást bármelyik órán könnyű reprodukálni.

Maradjunk a zsinegnél és a derékszögnél. Ha már elég sok pitagoraszi számhármassal találkoztunk (segítségül hívható akár a függvénytábla, akár az internet), vagy akár egy másik témában, a trigonometria összefüggéseivel vizsgálgatjuk a derékszögű háromszögek oldalai és szögei közötti viszonyokat, tegyük szemléletessé megállapításaink egyikét. Ha a táblára rajzolunk egy nem túl nagy derékszögű háromszöget, melynek egyik hegyesszöge kb. 4-5°, azt tapasztaljuk, hogy – ügyes rajz esetén is – alig látható a 4°-os szöggel szemközti befogó. Ha a rajz a tábla teljes hosszán keresztül készül – vonalzó nélkül ez már biztos kezet igényel – nos, akkor már valamivel jobban látható a „kritikus" befogó. Mindössze egy mondattal utalhatunk további nagyításokra, bárkinek könnyű belátni a folytatást. Egy mondatnál több időbe kerül, de bőségesen megtérül fáradozásunk, ha a magunkkal hozott háztartási spárga kisebb gombolyagját elővéve a végét a katedra lábához erősítjük, miközben önként vállalkozó segítőnket arra kérjük, menjen távolabb úgy 5-6 méternyire, ott ujjával rögzítse a kifeszített spárgát. Majd egy arasznyit mérjen tovább a spárgán és ezt a spárgapontot vigye az előző rögzítési pontba. Miközben az osztály – ismerve szemléltető bűvészkedéseink eredményét – csendben figyeli, mi végre ez az egész, felhívhatjuk a figyelmet a spárga kismértékű lazulására. (Valóban csekély a lazulás, hiszen 5-6 méteres kifeszített darabot egy arasszal toldottunk meg.) Feszítsük ki újból, mégpedig úgy, hogy a katedra lábához rögzített végét a padló síkjára merőlegesen addig emeljük (esetleg segít a merőlegesben az asztalláb), amíg a zsineg újra feszes lesz. És ekkor, tessék kipróbálni, már olyan magasra emeltük, hogy a nem túl nagyméretű Szabó Peti guggolva át tud csusszanni alatta. Lám csak, egy arasz ennyit ér!

Olyasmiről volt szó, amely egyúttal azt is szemléletessé teszi, hogy kis eltérések nagy távolságokban nagy eltéréseket is eredményezhetnek. Egyben ámulattal adózhatunk a piramisok építőinek, akik sok ezer évvel a daruk és lézeres távolságmérők kora előtt hihetetlen pontossággal alkották meg építményeiket. Pedig a piramisok építésénél egy fok eltérés miatt sok ezer tonna kő és sok ezer ember többévi munkája megy veszendőbe, nem beszélve a kapott építmény szabálytalanságáról…[31]

Ellipszis. Jó, ha a fiókunkban tartott zsineget bevisszük a ponthalmazok közül az ellipszist bemutató órára. Szükség lesz két jó hegyes rajzszögre is. Az ellipszis, mint tudjuk, azon síkbeli pontok halmaza, amelyeknek két adott ponttól (fókuszpontok) mért távolságösszege állandó. A két adott pont lesz a táblába szúrt két rajzszög (ennyi rongálást még elbír a tábla), a távolságok összege pedig a madzag hossza. Ha jól választottuk meg a rajzszög-fókuszpontok távolságát és jól rögzítettük hozzájuk a madzag végeit, akkor meglepően gyönyörű (ha ügyetlenek vagyunk, bájosan ákom-bákom) ellipszis rajzolható úgy, hogy a zsineget a krétával feszítjük ki, minden lehetséges helyzetben.



A hatás természetesen fokozható, ha a nálunk levő zsineg helyett elkérjük egy önként vállalkozótól a cipőfűzőjét. (10-15 éves osztálytalálkozók visszatérő humoros történeteiben garantáltan felbukkan az „…amikor a Szabó Peti edzőcipőjéből kifűztük a fűzőt és a táblán rajzoltunk vele. Tényleg, mit is?…")

III.3.3. Nagy számok világa

Bár az újságok tele vannak milliárdokkal, milliomodokkal, mégsem könnyű ezeket a mennyiségeket valami olyasmihez kötni, amit már ismerünk, vagy tudunk becsülni. Nem a tudományos munkatársak, hanem az utca emberei vannak többségben. Ha mindannyian elővennék és leporolnák a hatványozásról tanult ismereteiket, aktualizálhatnák úgy, hogy a piramisjátékoknak és a multi-level cégeknek kevesebb becsapott áldozata legyen. Addig is, míg a boldog tudatosság ideje eljön, vigasztalásul álljon előttünk a mondabeli király története, akinek annyira megtetszett a sakkjáték, hogy annak feltalálóját meg szerette volna jutalmazni. Kérhetett bármit. A feltaláló szerény ember levén ezt mondta: „Felséges királyom, nem kérek én mást, mint a sakktábla első mezőjéért 1 búzaszemet, a másodikért kettőt, a harmadikért négyet, majd így tovább nyolcat, tizenhatot stb." A király megörült, de öröme nem tartott sokáig, hiszen az összesen 1+2+4+8+…+263 összegű búzaszem az egész Föld kb. két teljes évi búzatermésével egyenlő. Nehéz lett volna a jutalom megadása.

A **Himalája**-expedíciók jubileumi évében talán időszerű a következő feladat: ha az előző feladatban a sakktábla mezőihez rendelt búzaszemeket 1 mm-esnek tekintjük és egymás tetejére fektetjük (gondolatkísérlet!), el tudjuk-e érni az egymásra tett búzaszemek oszlopával a Mount Everest magasságát? Ha igen, hányadik mezőnél? A Mount Everest 8848 m magas – elérhető ez, legalább gondolatban? Egy sorban belátható, hogy a 23. mezőnél már elég magas lesz az oszlop (1+2+22+23+…+223 ≈ 8388608, ez kis híján a keresett magasság mm-ben). Remek példák ezek arra, hogy bár a hatványozottan növekszik kifejezést gyakran halljuk, használjuk, de hogy ez valójában mekkora növekedést is jelent, azt nehéz hétköznapi gondolkodással átlátni.

Szemléltetés papírlappal! A kettő hatványait (2; 4; 8; 16; 32…) még jól tudjuk követni 210=1024-ig, esetleg még egy kicsit tovább, de hamarosan vége a követhető nagyságrendeknek. Becsléseinkhez támpontot nehéz kapni. Járatlanságunk ezen a területen még mulattató is olykor. Egy önként vállalkozótól kérjünk egy lapot a füzetéből. (A bőség zavarával fogunk küszködni, olyan sokan áldoznának boldogan a füzetcsonkításnak!) Tessék jól figyelni, most ezt a lapot kettőbe hajtjuk, majd ismét. Itt már négy réteg, ezt újra félbehajtva már nyolc, majd újra, ez már tizenhat. Itt jó estben még tudunk egyet hajtani, de a papír már vastag és kicsi a további hajtáshoz. Szóval 5 hajtás után 25=32 réteg és a papírunkon nem tudjuk folytatni az eljárást. Sebaj. Képzeletünk segítségével dolgozunk tovább. Tessék elképzelni, hogy van egy jókora papírunk, mondjuk akkora, mint a Szahara. (Ekkora csak elég!) Jó vékony, mondjuk 0,01 mm. Ezt most képzeletben hajtsuk félbe, majd újra és újra, összesen ötvenszer. Most becsüljük meg, milyen magas lesz ez a 250 papírréteg. Ne feledjük, jó vékony papír volt! Szabad licitálni. Mondjuk, akkora lesz, mint a példatár? Vagy mint a pad? Esetleg, mint az osztály legmagasabb gyereke? Bátrabbak mondhatják nyugodtan, hogy akkora lesz, mint a tévétorony. Vagy ez abszurd? És a bazilika, túlzás? Maradjunk a tanterem belmagasságánál? Vagy maximum 1 m? Na jó, akkor számoljunk: 250x0,01 mm (számológéppel számolva és függvénytáblabeli adatok alapján egyetlen sorban adódik), ez a Föld–Hold-távolságnak kb. harmincszorosa! Ez bizony meglepő!

III.3.4. Jutalomjáték

Az órák végére, 100. órákra tartogatok jutalomfeladatokat, gyakran nem is a tanult témához kapcsolódóan, de szigorúan csak olyanokat, amiknek nincs „matematika szaga”. (Vigyázni kell ezekkel a feladatokkal, mert annyira megszeretik őket a gyerekek, hogy óra végén kórusban számon kérik, ha nincs.)[32]

☺ *Egy szigeten élők közül az Igazmondók mindig igazat mondanak, a Hazudósok mindig hazudnak. Ha találkozunk egy „bennszülöttel” és megkérdezzük, hogy ő Igazmondó, vagy Hazudós-e, mit fog válaszolni? Tudunk-e olyat kérdezni, hogy a válaszról el tudjuk dönteni, melyik is ő?*

☺ *Egy menekülő rablónál egy vastag aranylánc hét szemből álló darabja van. Bújtatójának csak ezzel tud fizetni és szállásadója ragaszkodik hozzá, hogy az ott töltött éjszaka után mindig fizessen egy láncszemmel, de úgy, hogy a legkevesebb* *kárt tegye a láncsorban, vagyis csak egy szemet nyithat szét. Hol kell szétnyitnia a láncot, hogy minden éjszaka után fizethessen?*

☺ *Két kupacban 5-5 kavics van. Ketten játszanak. Egy játékos egy lépésben kiválaszt egy kupacot és onnan annyi kavicsot vesz el, amennyit akar, de legalább egyet el kell vennie. Az nyer, aki az utolsó kavicso(ka)t elveszi. Feltételezve, hogy mindkét játékos egyformán okos, tud-e valamelyikük úgy játszani, hogy mindenképpen nyerjen? Ha igen, hogy játsszon, kezdő legyen-e vagy második?*

☺ *Fura Feri elhatározta, hogy ezentúl hétfőn, szerdán és pénteken mindig igazat mond, más napokon mindig hazudik. Egyszer azt hallottuk tőle: „Holnap igazat fogok mondani". A hét mely napján történt ez?*

☺ *Egy szultánnak 143 felesége volt. A néptől 1000 napon át adót szedett úgy, hogy az első nap 144 aranyat és minden nap egy arannyal többet. A végén a beszedett adót egyenlően akarta szétosztani feleségei között. Sikerült?*

☺ *II. Pomádé annyira utálta elődjét, I. Pomádét, hogy országában betiltotta az egyes számjegyet. Így kellett számolni: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 22, 23, … Milyen szám áll a 2003. helyen?*

☺ *Diophantosz sírfelirata alapján számoljuk ki hány évesen halt meg:*

Vén Diophantoszt rejti e kő. Bár ő maga szunnyad,
Megtanította a sírt: mondja el élte sorát.
Évei egyhatodát tölté ki a gyönge gyerekkor,
Még feleannyi lefolyt, s álla szakálla kinőtt.
Egyheted eltelt még, és nászágy várta a férfit,
Elmúlt újra öt év, és fia megszületett.
Ez feleannyi napig láthatta a fényt idefenn, mint
Atyja, mivel neki így szabta az isteni sors.
Őt gyászolva a sír felé hajlott agg Diophantosz:
Négy évvel később ő is elérte a célt.
Mondd, hány esztendőt élt hát meg gyászban, örömben
S itta az édes fényt, míg hona lett ez a sír?

Mára már rejtvénnyé váltak a régebbi korok megfogalmazásai is. Remek fejtörő és sok derű forrása már a mondatok megértése is, aztán pedig a matematikai tartalomé:

☺ *A másodkarú ekvációk bal oldalán áll a falkamennyiség, jobb oldalán pedig a cifra.*

☺ *dőtlen eggyköző hosszabb négyszög (téglalap), ferdényded (paralalogramma), asztallag (trapéz), terj (terület), hajtalék vagy lőkanyar (parabola), tüzellő (fókusz), megapadt karika (ellipszis), edgyügyő erány / hányási erány (egyenes/fordított arányosság), kotzkalapos teljes egyformásítás (teljes négyzetté kiegészítés), viszontag (reciprok), kebel (sinus), pótkebel (cosinus), veszett gyökér (irracionális gyök), siket vagy vak gyökér (komplex gyök)*

☺*„Jelentés a császári és királyi inspektornak az helvét vallású kollégium tiszta tudákosság leckéin végzett vizitációjáról:*

…Tudtak vala resoválni edgyügyő egyenletet, viszontagos egyenletet, még továbbá másodhatalmú egyenletet kotzkalapos teljes egyformásítással. Szép vala, hogy esmérék az veszett és siket gyökereket, szintúgy az merevélyt és almerevélyt. Ezekkel a műtétek mind helyén valának.

Hanem aztán a harmadik deák-klasszisban baj is lőn. Mikoron ugyanis junior Gyarmati praeceptor uram az lapháromszögelléseket oktatván megkérdezi Toldallagi földmérő Ábris nevű fattyát, mi jutna eszébe, hallván eztet: kebel x, az deák válaszolá, neki bizon nyugalmazott enzsenőr kapitán Bolyai János szépséges szolgálló leánya. Továbbiglan az praeceptor uram meg sem kérdezé a pótkebelt, visszás kebelt, visszás pótkebelt. Az deák paráznaságát hallván a vélemények odáig mentek vala, hogy vasárnapon az Erős vár a mi Istenünk elkántálása után tíz botütés veresék rajta. Ez megtörténvén esmég megkérdezé az professzor az deákot, most mi jutna eszébe, hallván, kebel x. Az deák hangosan felelé, miszerint most már a professzor uram ides-anyja."

UTÓSZÓ

Kimeríthetetlen kút a matematika csodálatos kútja. Mindenki találhat benne kedvére valót: a történelem szerelmese, a biológiát szerető, a moralista és lehetetlen felsorolni mindenkit a csak rejtvényre vágyókig. A matematika sokkal több, mint számok, számolási trükkök vagy síkidomok raktára. Egy máig fejlődő, izgalmas világ, amely gyakran a mindennapok kérdései mentén fejlődik, néha pedig hajmeresztően életidegen, és amely akár a legreménytelenebbnek tűnő pontokon mutathat összefüggést az univerzum, a földi élet, a társadalmak vagy alacsonyabb rendű populációk, élettelen folyamatok problémáival. Matematikával tehát foglalkozni kell, teszi is ezt matematikusok hada szerte a világon. És tanítani is kell, ahogy szintén teszik ezt szerte a világon. De nem mindegy, hogyan. Én a „felhasználóbarát" módszer mellett voksolok. Ma, a számítógépek robbanásszerű elterjedésének éveiben talán így is mondhatjuk azt, amit évezredekkel ezelőtt így fogalmazott Valaki: Szeresd felebarátodat! Szeresd! Vagyis figyelj oda rá, tedd azt, ami neki jó! Neveld, tanítsd úgy, hogy növekedjék általa! Tedd legjobb tudásod szerint! Ne szűnj meg nyitottnak maradni, hogy újíthasd és kontrollálhasd magad! Nekem szerencsém volt: olyan tanárok tanítványa lehettem, akik így tanítottak. Köszönet ezért Irmus néninek (Könczöl Ferencné) és Klári néninek (Joó Béláné), akiktől matematikából és emberségből az alapokat kaptam melegen ölelő szeretetben. És köszönet Györgyinek (Tornyos Tivadarné), akitől a gimnázium emelt óraszámú matematikáját kiváló didaktikai felépítéssel ismerhettem meg, olyannyira, hogy ma is, amikor közvetlen kollégák vagyunk, sokat merítek ebből. És köszönet Györkő Zolinak, akivel kollégák voltunk, és akinek szárnyaló gondolatai mindig lendülettel és új munkakedvvel töltöttek el. És végül köszönet a KPSZTI-nek, hogy a pályázat kiírásával új célt adott ezeknek a gondolatoknak az összeszedéséhez, amelyeknek továbbfűzése tanári gyakorlatomat gazdagítja majd.

BIBLIOGRÁFIA

A katolikus iskola - A Katolikus Nevelés Kongregációja, Róma, 1977 (1)
Bergengóc példatár, Typotex, Bp., 1999 (12)
Davis–Hersh: *A matematika élménye,* Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1984 (9)
Dienes Zoltán: *Építsük fel a matematikát,* SHL Hungary Kft., Bp., 1999 (2)
Filep László: *A tudományok királynője,* Typotex Kft., Bp., Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 1997. (3)
Hoffman, Paul: *A prím ember,* Scolár, Bp., 1999 (8)
Kosztolányi–Mike–Vincze: *Érdekes matematikai feladatok,* Mozaik, Szeged, 1991 (13)
Mlodinow, Leonard: *Euklidesz ablaka,* Akkord Kiadó, 2003 (5)
Sain Márton: *Matematikatörténeti abc,* Tankönyvkiadó, 1987 (7)
Stewart, Ian: *A természet számai,* Kulturtrade Kiadó, Világ-Egyetem sorozat (10)
Sain Márton: *Nincs királyi út,* Gondolat, Bp., 1986 (11)
Zsámbokiné–Horváthné: Matematika kézzel, fejjel, szívvel, Okker, Bp. (6)
www.mindentudasegyeteme.hu/lovasz (4)

JEGYZET

1. „…az iskola: hely, ahol a műveltség módszeres és kritikus elsajátítása által kiformálódik a teljes ember" irodalomjegyzék (1) III. 26.
2. irodalomjegyzék (2) 14. o.
3. irodalomjegyzék (2) 28. o.
4. irodalomjegyzék (3) 9. o.
5. irodalomjegyzék (2) 33. o.
6. irodalomjegyzék (2) 32-33. o.
7. irodalomjegyzék (10)
8. a sorozat bármely tagját a harmadiktól kezdődően az őt megelőző két tag összegeként kapjuk
9. irodalomjegyzék (10) 13. o.
10. Ezzel a csodálatos mintával indul Ian Stewart: A természet számai c. könyve (irodalomjegyzék (10). Az ábrában rejtve marad az eredeti spirális, a belőle indulókat láthatjuk összekötve.
11. Már a görögök óta ismert probléma: egy szakasz olyan felosztása, amely esetén a rövidebb darab úgy aránylik a hosszabbhoz, mint a hosszabb az egészhez, vagyis a:b=b:(a+b) Ez a bizonyos aranymetszeti arány szintén legalább két év-

ezred óta foglalkoztatja a tudósokat, művészeket, esztétákat, bölcselkedőket, akik a görögök pentagrammájától kezdve az épületek és festmények harmóniáján át a szimfóniákig mindenütt előbukkanni látják/hallják.

12. A Mindentudás Egyetemének jóvoltából talán már nem is olyan kevesen, hiszen Lovász László előadása erre is kitért. Irodalomjegyzék (4)

13. irodalomjegyzék (4)

14. irodalomjegyzék (4)

15. irodalomjegyzék (9) 34. o.

16. irodalomjegyzék (3) 35. o.

17. irodalomjegyzék (6) 58. o.

18. Euklidész párhuzamossági axiómája szerint bármely egyenessel egy rajta kívüli ponton át egy és csak egy párhuzamos húzható. A hiperbolikus, és elliptikus modellekben kettő, ill. egy sem.

19. lásd még III.3.1.

20. irodalomjegyzék (6) 59. o.

21. irodalomjegyzék (7) Gerbert címszó

22. irodalomjegyzék (9) 76. o.

23. irodalomjegyzék (8)

24. a következőt Fermat találta meg 1686-ban, a 17296-ot és a 18416-ot. A 19. század közepéig sok matematikus keresése nyomán mintegy hatvan ilyen számpárra akadtak. 1866-ban egy 16 éves olasz iskolás fiú bukkant rá a második legkisebb barátságos számpárra, az 1184-re és az 1210-re. Ma már százával ismertek ilyen párok, de az ikerprímekhez hasonlóan senki nem tudja, hány van belőlük. Erdős Pál szerint végtelen sok.

25. irodalomjegyzék (8) 89-93. o.

26. irodalomjegyzék (7)

27. irodalomjegyzék (11) 273. o.

28. Úgy definiálta a mértani sorozatot, hogy: olyan sorozat,amely sorozat tagjainak logaritmusa számtani sorozat

29. Gauss azt igazolta, hogy a prímszám oldalszámú szabályos sokszögek közül azok szerkeszthetők, amelyek oldalszáma Fermat-féle prím, tehát a 3; 5; 17; 257; 65 537.

30. Ezekről az érdekes teremtményekről nemrégiben volt szerencsém előadást hallgatni éppen attól a kutatótól, aki egyedüliként publikált ez idáig ebben a témában: dr. Szalay István, szegedi matematikus.

31. irodalomjegyzék (5) 18. o.

32. A feladatok az irodalomjegyzék (12), (13)-ból származnak, a mat. történeti szemelvények a (3)-ból.

TARTALOMJEGYZÉK